Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES

RESOLUCIÓN MODELO

Pruebas de Transición

MATEMÁTICA

PROCESO ADMISIÓN 2021

PREGUNTA 1

¿Cuál(es) de las siguientes operaciones da(n) como resultado el número 2?

I) $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{6}$

II) $\frac{22}{5} : \frac{5}{11}$

III) $\frac{10}{4} - \frac{2}{4}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe resolver las operaciones que se dan en I), en II) y en III) y así, determinar cuál o cuáles de ellas dan como resultado el número 2.

En I), simplificando y multiplicando las fracciones se tiene que $\frac{\cancelto{1}{6}}{\cancelto{1}{7}} \cdot \frac{\cancelto{2}{14}}{\cancelto{1}{6}} = 2$.

En II), dividiendo las fracciones se tiene que $\underbrace{\frac{22}{5} : \frac{5}{11} = \frac{22}{5} \cdot \frac{11}{5}}_{\text{Aplicando } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}} = \frac{242}{25} \neq 2$.

En III), restando las fracciones de igual denominador se tiene que $\frac{10}{4} - \frac{2}{4} = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Como solo en I) y en III) el resultado de las operaciones es 2, la opción correcta es D).

PREGUNTA 2

Un paquete de 24 rollos de papel higiénico de $50\ \text{metros}$ cada uno, cuesta $\$\ 7.440$. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el valor de $1\ \text{metro}$ de dicho papel, en pesos?

A) $\dfrac{7.440}{24}$

B) $\dfrac{7.440}{50}$

C) $\dfrac{7.440}{24 \cdot 50}$

D) $\dfrac{7.440}{24} \cdot 50$

E) $\dfrac{7.440}{50} \cdot 24$

RESOLUCIÓN

La cantidad total de metros que cuesta $\$\ 7.440$ corresponde al producto entre la cantidad de rollos de papel higiénico que tiene el paquete y la cantidad de metros que tiene cada rollo, lo que en este caso es $24 \cdot 50$.

Luego, al dividir el costo del paquete de rollos por el total de metros de papel incluidos en el paquete se obtiene el precio de $1\ \text{metro}$ de papel higiénico, es decir, $\dfrac{7.440}{24 \cdot 50}\ \text{pesos}$, expresión que se encuentra en la opción C).

PREGUNTA 3

Erika pide un préstamo de $\$ 180.000$ en una financiera para pagarlo en 12 cuotas mensuales iguales. La financiera utilizó la siguiente expresión para calcular el interés:

$$\text{Interés anual} = 180.000 \cdot \frac{20}{100}$$

¿Cuánto debe pagar Erika solo por concepto de interés en cada cuota, donde el interés a pagar es el mismo en cada cuota?

A) $\$ 3.000$

B) $\$ 15.000$

C) $\$ 18.000$

D) $\$ 183.000$

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar el interés que debe pagar Erika en cada cuota es, calcular primero el interés anual que la financiera le cobra a Erika y luego, dividir esa cantidad en 12 cuotas iguales. De esta manera, se tiene lo siguiente:

- el interés anual es $180.000 \cdot \frac{20}{100} = \$ 36.000$.
- en cada cuota se pagará por concepto de interés, $\frac{36.000}{12} = \$ 3.000$.

Por lo tanto, la clave es A).

PREGUNTA 4

Si $P = \sqrt{20}$, $Q = 5\sqrt{4}$, $R = 3\sqrt{8}$ y $S = 8\sqrt{2}$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $P < R = S < Q$

B) $R < P < S < Q$

C) $P < R < Q < S$

D) $S < Q < R < P$

E) $Q = P < S < R$

RESOLUCIÓN

Para ordenar los números dados en el enunciado se debe aplicar las propiedades de las raíces y para ello, se puede elevar al cuadrado los números equivalentes a P, Q, R y S para posteriormente compararlos entre sí.

Recuerde que:

al considerar los números reales mayores que cero, a y b, se cumple que:

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- $\left(b\sqrt{a}\right)^2 = b^2 \cdot a$
- si $a^2 > b^2$, entonces $a > b$.

De manera que, al elevar al cuadrado cada número se tiene:

$P^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$	$Q^2 = \left(5\sqrt{4}\right)^2$	$R^2 = \left(3\sqrt{8}\right)^2$	$S^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2$
$P^2 = 20$	$Q^2 = 5^2 \cdot 4$	$R^2 = 3^2 \cdot 8$	$S^2 = 8^2 \cdot 2$
	$Q^2 = 100$	$R^2 = 72$	$S^2 = 128$

Como $20 < 72 < 100 < 128$, se tiene que $P < R < Q < S$.

Otra manera de resolver esta pregunta es aplicar la propiedad $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ y luego, comparar las cantidades subradicales:

$$P = \sqrt{20}$$
$$Q = 5\sqrt{4} = \sqrt{5^2 \cdot 4} = \sqrt{100}$$
$$R = 3\sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 8} = \sqrt{72}$$
$$S = 8\sqrt{2} = \sqrt{8^2 \cdot 2} = \sqrt{128}$$

Recuerde que:

si a y b son números reales mayores que cero y $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Luego, $\sqrt{20} < \sqrt{72} < \sqrt{100} < \sqrt{128}$, es decir, $P < R < Q < S$.

Así, la opción correcta es C).

PREGUNTA 5

¿Qué porcentaje es $(a + b)$ de $a \cdot b$?

A) $\dfrac{a + b}{a \cdot b}\%$

B) $\dfrac{100(a + b)}{a \cdot b}\%$

C) $\dfrac{100 \cdot a \cdot b}{a + b}\%$

D) $\dfrac{a \cdot b(a + b)}{100}\%$

RESOLUCIÓN

Para calcular el porcentaje que representa $(a + b)$ de $a \cdot b$ se debe recordar que:

> si B es el $p\%$ de A, entonces se cumple que $\dfrac{p \cdot A}{100} = B$, por lo tanto, el porcentaje que representa B de A se calcula como $p = \dfrac{100 \cdot B}{A}$.

De esta forma, si el $x\%$ de $a \cdot b$ es $(a + b)$, se cumple que $\dfrac{x \cdot a \cdot b}{100} = (a + b)$, luego $x = \dfrac{100(a + b)}{a \cdot b}\%$, expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 6

200 estudiantes responden una prueba y el 10% de ellos responde de manera errónea la pregunta 15.

Considerando que todos los estudiantes contestaron la pregunta 15, ¿cuántos estudiantes contestan correctamente esta pregunta?

A) 10

B) 20

C) 160

D) 180

RESOLUCIÓN

Una manera de determinar la cantidad de estudiantes que contestaron correctamente la pregunta 15 de la prueba es calcular cuántos estudiantes contestaron erróneamente esa pregunta y restarlo del total de estudiantes que la respondieron. Como el 10% de 200 es 20, entonces el número de estudiantes que contestaron correctamente esta pregunta es $200 - 20 = 180$, valor que se encuentra en la opción D).

PREGUNTA 7

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} =$$

A) $-\frac{1}{2}$

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt[4]{2}$

E) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$

RESOLUCIÓN

Una forma de responder esta pregunta es aplicar la definición de logaritmo y la relación entre raíces enésimas y potencias. Para ello se debe recordar que:

al considerar los números reales mayores que cero a y c, con $a \neq 1$, se cumple que:

- si $\log_a c = x$, entonces $a^x = c$.
- si $a^x = a^c$, entonces $x = c$.

De esta forma, se puede efectuar el siguiente procedimiento:

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$$

$$\left(2^{-1}\right)^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$-x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Aplicando $\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$, con $a \neq 0$

Aplicando $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, con $a > 0$

De esta manera, la clave es A).

PREGUNTA 8

Si $3^m = p$ y $8^b = q$, con m y b números enteros, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $\left(3^{m+1} \cdot 8^{b+1}\right)^{-1}$?

A) $\dfrac{1}{pq + 1}$

B) $\dfrac{1}{24pq}$

C) $24pq$

D) $-24pq$

E) $-(pq + 2)$

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se deben recordar y aplicar las siguientes propiedades de las potencias:

si b y c son números enteros y a es un número racional, entonces se cumple que:

- $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, con $a \neq 0$

Una manera de resolver esta pregunta es efectuando el siguiente procedimiento:

Multiplicar en ambos lados de la igualdad por 3.	Multiplicar en ambos lados de la igualdad por 8.
$3^m = p$ $3^m \cdot 3 = p \cdot 3$ $3^{m+1} = 3p$	$8^b = q$ $8^b \cdot 8 = q \cdot 8$ $8^{b+1} = 8q$

Luego, $\left(3^{m+1} \cdot 8^{b+1}\right)^{-1} = (3p \cdot 8q)^{-1} = (24pq)^{-1} = \dfrac{1}{24pq}$.

Expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 9

Si p y q son números reales tal que $p < q$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) $\sqrt{p^2 - q^2} = p - q$

B) $\sqrt[3]{p - q}$ no es un número real.

C) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p + q}$

D) $\sqrt{-p - q}$ no es un número real.

E) $\sqrt[3]{p} < \sqrt[3]{q}$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe analizar la afirmación que se da en cada una de las opciones para determinar cuál de ellas es siempre verdadera.

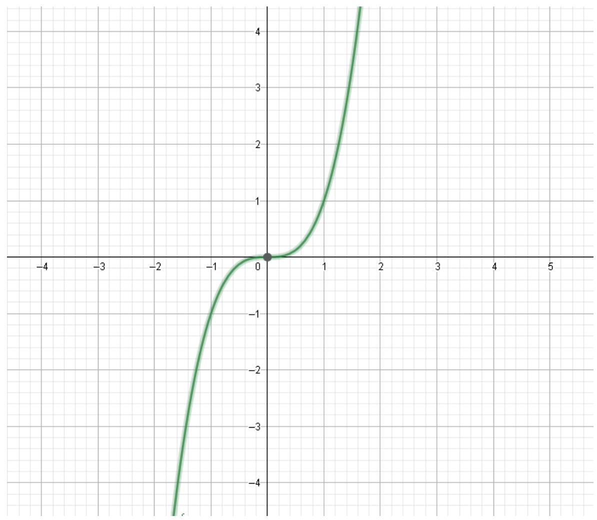
Para probar que A) no es siempre verdadera basta un ejemplo: si $p = -2$ y $q = 1$, entonces se tiene que $p - q = -2 - 1 = -3$, lo que jamás corresponderá al valor de una raíz que es siempre mayor o igual a cero.

Para descartar B), basta recordar que la raíz cúbica de un número negativo es un número real negativo. Por ejemplo, si $p = 1$ y $q = 9$, entonces se tiene que $\sqrt[3]{p - q} = \sqrt[3]{1 - 9} = \sqrt[3]{-8} = -2$, que es un número real.

Para descartar C), basta recordar que ese es un error común, y por ejemplo, si $p = 1$ y $q = 4$, entonces se tiene que $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$ y $\sqrt{p + q} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, por lo que $\sqrt{p} + \sqrt{q} \neq \sqrt{p + q}$ cuando $p = 1$ y $q = 4$.

D) sería siempre verdadero si $-p - q$ fuera siempre negativo, lo que no tiene por qué ser cierto, pues solo sabemos que $p < q$. Por ejemplo, si $p = -4$ y $q = 0$, entonces se tiene que $\sqrt{-p - q} = \sqrt{-(-4) - 0} = \sqrt{4} = 2$, valor que es un número real.

En E), se debe recordar que la función potencia cúbica es creciente como se muestra en el gráfico.



Además recordemos que $\sqrt[3]{x}$ elevado al cubo es igual a x, por lo tanto, como $p < q$, se tiene que $\sqrt[3]{p} < \sqrt[3]{q}$, siendo esta opción la respuesta correcta.

PREGUNTA 10

Si $b = \log_2 a$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $0 < a < 1$, entonces $b < 0$.

II) Si $b > 1$, entonces $a > 2$.

III) Si $a = \sqrt{32}$, entonces $b = 2{,}5$.

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), analizando las características asignadas a las variables a y b en cada caso.

Recuerde que:
Si n y m son números reales mayores que cero, con $n \neq 1$, por lo tanto se cumple que $\log_n m = x$, lo que equivale a $n^x = m$.

Como $b = \log_2 a$, entonces se cumple que $2^b = a$.

Para analizar I) vemos que si $0 < a < 1$, se tiene que $0 < 2^b < 1$ y esta desigualdad solo es verdadera cuando $b < 0$. Por lo que, la afirmación en I) es verdadera.

La afirmación en II) es verdadera, pues si $b > 1$, se tiene que $2^b > 2$, pero como $2^b = a$, se cumple que $a > 2$.

Por último, la afirmación en III) es verdadera, pues si $a = \sqrt{32}$, se tiene el siguiente desarrollo:

$$2^b = \sqrt{32}$$
$$2^b = \sqrt{2^5}$$
$$2^b = \left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$2^b = 2^{\frac{5}{2}}$$
$$2^b = 2^{2,5}$$
$$b = 2,5$$

Aplicando
si $n^x = n^m$, con $n > 1$,
entonces $x = m$

Como las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas, la clave es E).

PREGUNTA 11

Una pelota se deja caer desde una altura A. La altura que alcanza la pelota en el primer rebote es equivalente a $\frac{2}{3}$ de A. Después de cada rebote la pelota alcanza una altura equivalente a $\frac{2}{3}$ de la altura del rebote anterior. Se puede determinar el valor de la altura que alcanza al décimo rebote la pelota, si se conoce:

(1) la altura inicial A.

(2) la altura que alcanza en el tercer rebote.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Como la altura alcanzada después de cada rebote es $\frac{2}{3}$ de la altura del rebote anterior, se tiene que la altura de la pelota al décimo rebote se puede expresar como $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$, donde A es la altura inicial de donde se deja caer la pelota.

En (1) se dice que se conoce la altura inicial A, por lo que con este dato se puede determinar la altura alcanzada por la pelota al décimo rebote.

En (2) se señala que se conoce la altura alcanzada al tercer rebote lo que se puede expresar como $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \mathrm{N}$, donde N es la altura conocida, luego se puede obtener A y con ese valor se puede obtener la altura que alcanza la pelota al décimo rebote.

Como con la información dada en (1) y con la información dada en (2), por separado, se puede determinar la altura pedida, la respuesta correcta es D).

PREGUNTA 12

Si Ana tiene en la actualidad $(2a-3)$ años, ¿qué edad tendrá en 4 años más?

A) $(2a+1)$ años

B) $(2a-7)$ años

C) $(6a+1)$ años

D) $(8a-12)$ años

RESOLUCIÓN

Para la resolución de este problema se debe sumar 4 años a la edad actual de Ana y luego, reducir los términos semejantes, es decir,

$$(2a-3)+4=2a-3+4=(2a+1) \text{ años}$$

Expresión que se encuentra en la opción A).

PREGUNTA 13

Calíope efectúa el siguiente procedimiento para reducir la expresión $2(2x-5)^2-10(2x+3)$.

$$
\begin{aligned}
& 2(2x-5)^2-10(2x+3) && \\
\text{Paso 1} \quad & =2(2x-5)^2-20x+30 && \\
\text{Paso 2} \quad & =2\left(4x^2-20x+25\right)-20x+30 && \\
\text{Paso 3} \quad & =8x^2-40x+50-20x+30 && \\
\text{Paso 4} \quad & =8x^2-60x+80 &&
\end{aligned}
$$

¿En cuál de los pasos efectuados por Calíope se cometió un error?

A) Paso 1
B) Paso 2
C) Paso 3
D) Paso 4

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta debemos analizar los pasos efectuados por Calíope al reducir la expresión, hasta encontrar el paso donde cometió un error. Es así que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 2(2x-5)^2\boxed{-10(2x+3)} && \\
\text{Paso 1} \quad & =2(2x-5)^2\boxed{-20x+30} && \\
\text{Paso 2} \quad & =2\left(4x^2-20x+25\right)-20x+30 && \\
\text{Paso 3} \quad & =8x^2-40x+50-20x+30 && \\
\text{Paso 4} \quad & =8x^2-60x+80 &&
\end{aligned}
$$

$$2(2x-5)^2-10(2x+3)=$$
$$2(2x-5)^2-10\cdot 2x-10\cdot 3=$$
$$2(2x-5)^2\boxed{-20x-30}$$

El error está en la multiplicación de -10 por 3.

Como se puede observar en el cuadro anterior, Calíope cometió el error en el paso 1, por lo que la clave es A).

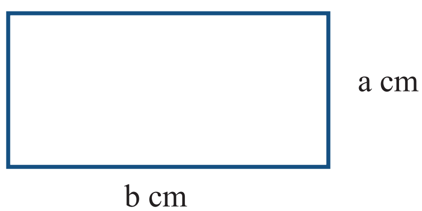
PREGUNTA 14

Sean a cm y b cm las medidas de los lados de un rectángulo cuya área es $48\ \text{cm}^2$. Si $a^2\ \text{cm}^2 + b^2\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$, ¿cuál es el valor de $(a + b)$?

A) 2
B) 10
C) 14
D) $\sqrt{52}$
E) $\sqrt{148}$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta recordemos que el área del rectángulo de la figura adjunta es $ab\ \text{cm}^2$.



Como el área del rectángulo es $48\ \text{cm}^2$, se puede escribir la igualdad $ab = 48$.

Considerando la igualdad $(a + b) = x$ y elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, se puede efectuar el siguiente procedimiento:

$$(a + b) = x$$

Aplicando $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

$$(a + b)^2 = x^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = x^2$$

Reemplazando $a^2 + b^2 = 100$

Reemplazando $ab = 48$

$$\boxed{a^2 + b^2} + 2\boxed{ab} = x^2$$

$$\boxed{100} + 2 \cdot \boxed{48} = x^2$$

De esta forma, $x^2 = 196$ y como a y b son números positivos al ser las medidas de los lados del rectángulo, se tiene que $a + b = x = 14$, siendo de esta manera la clave C).

PREGUNTA 15

Las $\frac{3}{4}$ partes de la longitud de una carretera están pavimentadas. Si aún faltan por pavimentar $(p-10)\,\mathrm{km}$ para tener la carretera completamente pavimentada, ¿cuál es la longitud total de la carretera, en función de p?

A) $\frac{4p-10}{3}\ \mathrm{km}$

B) $(4p-40)\ \mathrm{km}$

C) $(4p-10)\ \mathrm{km}$

D) $\frac{4p-40}{3}\ \mathrm{km}$

E) Ninguna de las anteriores

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe plantear una ecuación que represente la información del enunciado.

Así, si se considera la longitud total de la carretera como $x\ \mathrm{km}$, se tiene que:

- "Las $\frac{3}{4}$ partes de la longitud de una carretera están pavimentada"

se puede representar como $\frac{3}{4}x$

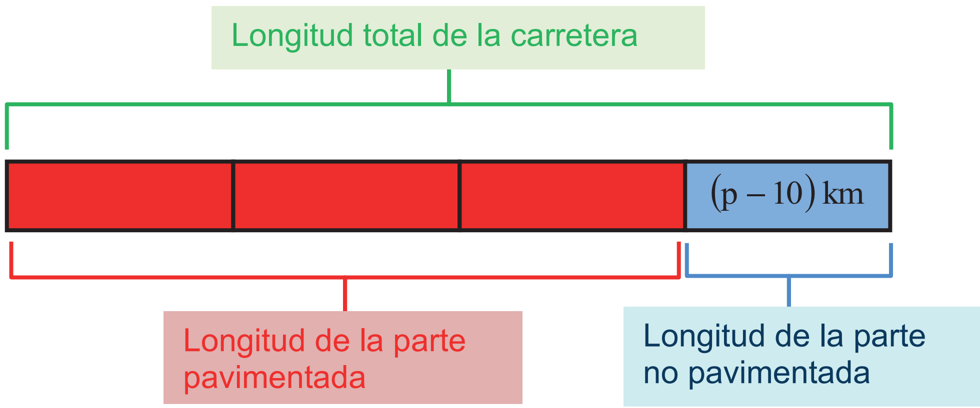
luego, lo que falta por pavimentar es $\frac{1}{4}x$

- "faltan por pavimentar $(p-10)\,\mathrm{km}$ para tener la carretera completamente pavimentada"

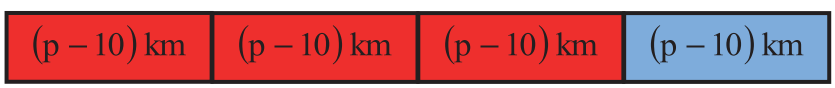
se puede representar como $\frac{1}{4}x = (p-10)$

De esta manera, al despejar x en la ecuación $\frac{1}{4}x = (p-10)$, se obtiene $x = 4(p-10) = 4p-40$, por lo que el largo de la carretera es $(4p-40)$ km, expresión que se encuentra en la opción B).

Otra forma de resolver este ítem es representar la situación a través del siguiente esquema:



Como $(p-10)$ km representa $\frac{1}{4}$ del total, se puede realizar el siguiente esquema:



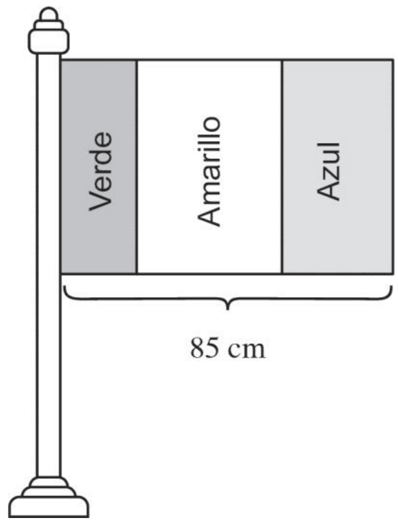
Luego, la longitud total de la carretera es

$$(p-10)\text{ km} + (p-10)\text{ km} + (p-10)\text{ km} + (p-10)\text{ km} = (4p-40)\text{ km}.$$

De esta manera, la clave es B).

PREGUNTA 16

Para las alianzas de un colegio un grupo de estudiantes confeccionará una bandera de forma rectangular, con tres franjas rectangulares, una de color verde, otra de color amarillo y la otra azul, tal como se muestra en la figura adjunta.



El grupo quiere que la medida del ancho de la franja de color amarillo sea el doble de la medida del ancho que la franja azul y que la medida del ancho de la franja verde sea 15 cm menor que el ancho de la franja azul.

¿Cuál debe ser la medida del ancho de la franja amarilla?

A) 50 cm

B) 40 cm

C) 35 cm

D) 25 cm

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema podemos plantear una ecuación que considera la información entregada en la figura, esto es, que la suma de las medidas de los anchos de las tres franjas rectangulares que componen la bandera es de 85 cm.

Anotemos como $x \text{ cm}$ la medida del ancho de la franja de color azul, luego:

- como la medida del ancho de la franja de color amarillo es el doble de la medida del ancho de la franja de color azul, se tiene que $2x \text{ cm}$ representa la medida del ancho de la franja de color amarillo.

- como la medida del ancho de la franja de color verde es $15\ \text{cm}$ más angosta que el ancho de la franja de color azul, se tiene que $(x-15)\ \text{cm}$ representa la medida del ancho de la franja de color verde.

Ahora, se plantea y se resuelve la siguiente ecuación:

$$x + 2x + x - 15 = 85$$

Reduciendo términos semejantes.

$$4x - 15 = 85$$

Sumando 15 a ambos lados de la igualdad.

$$4x = 100$$

Dividiendo por 4 en ambos lados de la igualdad.

$$x = 25$$

Por último, como la medida de la franja de color amarillo es $2x\ \text{cm}$, se tiene que la medida de esta franja es $2 \cdot 25\ \text{cm} = 50\ \text{cm}$, valor que se encuentra en la opción A).

PREGUNTA 17

Considere la ecuación $ax + b = c$, en x, con a, b y c números enteros positivos y $b < c$. ¿Cuál de las siguientes condiciones permite obtener como solución de esta ecuación un número **NO** entero?

A) $a = 1$

B) $a + b = c$

C) $c = 2b$ y $a = b$

D) $(c - b)$ es múltiplo de a.

E) $c < a + b$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se puede analizar cada una de las condiciones dadas en las opciones y verificar con cuál de ellas la ecuación dada en el enunciado **NO** tiene como solución un número entero.

Si se resuelve la ecuación del enunciado, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} ax + b &= c \\ ax &= c - b \\ x &= \frac{c-b}{a} \end{aligned}$$

Sumando $-b$ a ambos lados de la igualdad.

Dividiendo por a en ambos lados de la igualdad.

En A) se señala que $a = 1$, al reemplazar este valor en la igualdad anterior se tiene $x = c - b$ y como b y c son números enteros, entonces la diferencia entre estos números es un número entero.

En B) se tiene la igualdad $a + b = c$, de donde $a = c - b$ que al reemplazarlo en $x = \frac{c-b}{a}$ se obtiene que $x = \frac{a}{a} = 1$, el cual es un número entero.

En C) se tiene que $c = 2b$ y $a = b$, de donde $c = 2a$, luego al reemplazar c y b en $x = \frac{c-b}{a}$ se tiene $x = \frac{2a-a}{a} = \frac{a}{a} = 1$, el cual es un número entero.

Recuerde que:
sean p y q dos números enteros, se dice que p es múltiplo de q si se cumple que $p = k \cdot q$, con k un número entero.

En D) se dice que $(c - b)$ es múltiplo de a, lo que se puede escribir como $(c - b) = m \cdot a$, con m un número entero, reemplazando esto en $x = \frac{c - b}{a}$ se llega a $x = \frac{m \cdot a}{a} = m$, valor que es un número entero.

Por último, en E) se plantea que $c < a + b$ lo que es equivalente a $c - b < a$, además en el enunciado se tiene que $b < c$, de donde $0 < c - b$, luego se obtiene que $0 < c - b < a$, por lo que $x = \frac{c - b}{a}$ es un número decimal positivo **NO** entero al ser el numerador menor que el denominador, siendo esta opción la respuesta correcta.

PREGUNTA 18

La cantidad mínima recomendada de ingesta diaria de calcio para adultos de entre 19 años y 50 años es de 1.000 mg por día. Una taza (250 ml) de leche entera contiene 280 mg de calcio, aproximadamente, y un vaso (200 ml) de jugo de naranja contiene 50 mg de calcio, aproximadamente.

Miguel tiene 40 años y decidió que cierto día solo tomará leche entera y jugo de naranja. Si ese día se tomará solo una taza llena de leche entera y N vasos llenos de jugo de naranja, ¿cuál de las siguientes inecuaciones permite determinar los valores de N para los cuales Miguel cumple la ingesta recomendada de calcio?

A) $280 + \dfrac{50}{\mathrm{N}} \geq 1.000$

B) $(280 + 50)\mathrm{N} \leq 1.000$

C) $280\mathrm{N} + 50 \geq 1.000$

D) $280 + 50\mathrm{N} \geq 1.000$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe encontrar una inecuación que represente los datos entregados en el enunciado. Se sabe que Miguel tiene 40 años, por lo que la cantidad mínima recomendada de ingesta diaria de calcio es de 1.000 mg por día.

Por otro lado, se dice que cierto día Miguel solo tomará una taza llena de leche, la cual se sabe que contiene 280 mg de calcio y N vasos llenos de jugo de naranja, donde cada vaso contiene 50 mg de calcio.

Como se debe determinar la cantidad de vasos para los cuales Miguel cumple la ingesta recomendada de calcio, se plantea la siguiente inecuación:

$$280 + 50\mathrm{N} \geq 1.000$$

Cantidad de mg de calcio del vaso de leche.

Cantidad de mg de calcio de un vaso de jugo de naranja.

Cantidad de vasos de jugo de naranja.

Cantidad de mg mínima de calcio recomendada.

De esta manera, la opción correcta es D).

PREGUNTA 19

Para el cálculo de la tarifa eléctrica, en pesos, se usa la fórmula $T = Px + C$, donde T es el valor de la tarifa, P es el precio por kWh consumido, x es el consumo de energía en kWh y C es un cargo fijo. Para una tarifa entre $\$\,15.000$ y $\$\,70.000$, ¿cuál de las siguientes desigualdades representa los posibles valores del consumo?

A) $P(15.000 - C) < x < P(70.000 - C)$

B) $\dfrac{15.000}{P} - C < x < \dfrac{70.000}{P} - C$

C) $\dfrac{15.000 - C}{P} < x < \dfrac{70.000 - C}{P}$

D) $\dfrac{15.000}{P} + C < x < \dfrac{70.000}{P} + C$

E) $\dfrac{15.000 + C}{P} < x < \dfrac{70.000 + C}{P}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe encontrar el rango de los posibles valores que puede tomar el consumo de energía (x), en kWh, para que la tarifa (T) esté entre $\$\,15.000$ y $\$\,70.000$, es decir, para qué valores de x se cumple que $15.000 < T < 70.000$.

Desarrollando la desigualdad $15.000 < T < 70.000$, se obtiene:

$$15.000 < T < 70.000$$

Reemplazando la expresión $T = Px + C$.

$$15.000 < Px + C < 70.000$$

Sumando $-C$ a todos los miembros de la inecuación.

$$15.000 - C < Px < 70.000 - C$$

Dividiendo por P todos los miembros de la inecuación.

El sentido de las desigualdades no cambia pues $P > 0$.

$$\frac{15.000 - C}{P} < x < \frac{70.000 - C}{P}$$

Desigualdad que se encuentra en la opción C).

PREGUNTA 20

¿Cuáles son los valores de p y q, respectivamente, para los cuales se cumple que

$$\left.\begin{array}{r} -4p + 5q = 9 \\ -p - q = 9 \end{array}\right| \ ?$$

A) $-\dfrac{33}{2}$ y $\dfrac{15}{2}$

B) -6 y -3

C) -6 y -15

D) $-\dfrac{6}{4}$ y $-\dfrac{27}{4}$

E) -11 y 2

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se puede aplicar algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en este caso se aplicará el método de reducción, que busca eliminar una variable al sumar ambas ecuaciones, efectuando el siguiente procedimiento:

$$\left.\begin{array}{r} -4p + 5q = 9 \\ \boxed{-p - q = 9} \end{array}\right|$$

Multiplicando por 5 en ambos lados de la igualdad.

$$\left.\begin{array}{r} -4p + 5q = 9 \\ -5p - 5q = 45 \end{array}\right|$$

Luego, se suman los términos semejantes entre las ecuaciones en ambos lados de las igualdades y se despeja p.

$$\begin{aligned} -4p - 5p + 5q - 5q &= 9 + 45 \\ -9p &= 54 \\ p &= -6 \end{aligned}$$

Luego, si se reemplaza $p = -6$ en alguna de las ecuaciones, por ejemplo en $-p - q = 9$, se obtiene q, tal como se muestra a continuación:

$$6 - q = 9$$

Sumando -6 en ambos lados de la igualdad.

$$-q = 3$$

Multiplicando por -1 en ambos lados de la igualdad.

$$q = -3$$

Por el desarrollo anterior, la clave es B).

PREGUNTA 21

La edad actual de un padre (p años) menos la edad actual de su hijo (h años) es igual a 30 años y en 2 años más la edad del padre será el triple de la edad del hijo. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones representa dicha situación?

A) $\left.\begin{array}{l} p - h = 30 \\ p + 2 = 3(h + 2) \end{array}\right|$

B) $\left.\begin{array}{r} p = h - 30 \\ p + 2 = \dfrac{h}{3} + 2 \end{array}\right|$

C) $\left.\begin{array}{l} p - h = 30 \\ \dfrac{p}{3} + 2 = h + 2 \end{array}\right|$

D) $\left.\begin{array}{r} p = h - 30 \\ p + 2 = 3h + 2 \end{array}\right|$

E) $\left.\begin{array}{c} p - h = 30 \\ 3(p + 2) = h + 2 \end{array}\right|$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe comprender la información entregada en el enunciado, escribir las ecuaciones que representan la situación planteada y formar con ellas un sistema de ecuaciones lineales.

Al traducir el texto “La edad actual de un padre (p años) menos la edad actual de su hijo (h años) es igual a 30 años”, se obtiene la ecuación:

$$p - h = 30$$

Por otra parte, se tiene que la edad del padre y la edad del hijo en 2 años más se traduce como $(p + 2)$ años y $(h + 2)$ años, respectivamente.

Luego, al traducir el texto “en 2 años más la edad del padre será el triple de la edad del hijo”, se obtiene la ecuación:

$$p + 2 = 3(h + 2)$$

Así, el sistema que representa la situación planteada en el enunciado es:

$$\left.\begin{array}{l} p - h = 30 \\ p + 2 = 3(h + 2) \end{array}\right|$$

El cual se encuentra en la opción A).

PREGUNTA 22

¿Con cuál de las siguientes ecuaciones junto a la ecuación $3x - y = p$ se forma un sistema que podría **NO** tener solución, dependiendo del valor de p?

A) $x = 0$

B) $x - y = p$

C) $6x - 2y = p$

D) $2y - 6x = -2p$

E) $3x + y = p$

RESOLUCIÓN

Una forma de responder esta pregunta es revisar cada una de las ecuaciones presentadas en las opciones y comprobar si se forma un sistema que podría no tener solución.

Para ello se aplica algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Así, si la segunda ecuación del sistema es la dada en A), $x = 0$, el sistema se resuelve con $x = 0$ e $y = -p$.

Con la ecuación $x - y = p$ dada en B), se obtiene un sistema que se resolverá por el método de reducción, que busca eliminar una variable al sumar ambas ecuaciones, efectuando el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} 3x - y &= p \\ \boxed{x - y = p} \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 en ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} 3x - y &= p \\ -x + y &= -p \end{aligned}$$

Luego, se suman los términos semejantes entre las ecuaciones en ambos lados de las igualdades y se despeja $\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} 3x - x - y + y &= p - p \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Luego, si se reemplaza $x = 0$ en alguna de las ecuaciones, por ejemplo en $x - y = p$, se obtiene y, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 0 - y &= p \\ y &= -p \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 en ambos lados de la igualdad.

Por lo anterior, el sistema se resuelve con $x = 0$ e $y = -p$.

Con la ecuación dada en C), $6x - 2y = p$, y aplicando el método anterior, se tiene que el sistema que se forma con la ecuación del enunciado no tiene solución, es decir, no existe un valor para x ni para y que satisfaga el sistema.

Por lo anterior, la clave es C).

Otra forma de resolver la pregunta es la siguiente:

Hay que determinar las condiciones para que una ecuación $Ax + By = C$ forme un sistema sin solución con la ecuación $3x - y = p$, dependiendo del valor de p.

Recuerde que:

el sistema $\begin{array}{c|} ax + by = c \\ dx + ey = f \\ \hline \end{array}$, en x e y, no tiene solución cuando $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ y $\frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$.

Así, el sistema $\begin{array}{c|} 3x - y = p \\ Ax + By = C \\ \hline \end{array}$ no tiene solución si se cumplen las siguientes condiciones:

Condición 1

$$\frac{3}{A} = \frac{-1}{B}$$

$$3 \cdot B = -A$$

$$\boxed{\frac{B}{A} = -\frac{1}{3}}$$

Condición 2

$$\frac{-1}{B} \neq \frac{p}{C}$$

$$-C \neq p \cdot B$$

$$\boxed{\frac{C}{B} \neq -p}$$

Como la **condición 2** depende del valor de p, solo hay que comprobar la **condición 1**.

De esta manera, la única ecuación dada en las opciones que cumple la **condición 1** es la ecuación $6x - 2y = p$ de la opción C), pues $\frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

PREGUNTA 23

Dos empresas de electricidad, A y B, tienen una tarifa asociada (y) de acuerdo a cada kWh consumido (x) más un cargo fijo, tal como se muestra en el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} \text{Empresa A:} & y = ax + 750 \\ \text{Empresa B:} & y = bx + 500 \end{array}$$

Si a y b corresponden al precio de cada kWh consumido, con $0 < a < b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si hay un consumo de $\dfrac{250}{b - a}$ kWh en ambas empresas, entonces las dos empresas cobran lo mismo.

II) Si $b = a + 250$, entonces la tarifa en ambas empresas es la misma.

III) Si se elimina el cargo fijo de la tarifa de la empresa B, entonces siempre convendría a los consumidores la tarifa de la empresa B, en comparación a la tarifa de la empresa A.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Así, en I) para determinar el consumo en donde las dos empresas cobran lo mismo, se resolverá el sistema $\begin{array}{l} y = ax + 750 \\ y = bx + 500 \end{array}$ usando el método de igualación, como se muestra a continuación:

$$ax + 750 = bx + 500$$

Sumando $-ax$ a ambos lados de la ecuación.

$$750 = bx - ax + 500$$

Sumando -500 a ambos lados de la ecuación.

$$750 - 500 = bx - ax$$

Factorizando por x.

$$250 = (b - a)x$$

Dividiendo por $(b - a)$ en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{250}{(b - a)} = x$$

Es decir, las empresas A y B solo cobran lo mismo cuando hay un consumo de $\frac{250}{b - a}$ kWh, siendo la afirmación en I) verdadera.

La afirmación en II) es falsa, pues para que la tarifa de ambas empresas sea la misma deben estar modeladas por la misma ecuación y si se reemplaza $b = a + 250$ en la ecuación de la empresa B se obtiene una ecuación distinta a la ecuación de la empresa A, como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$y = bx + 500$$

Reemplazando $b = a + 250$

$$y = (a + 250)x + 500$$

$$y = ax + 250x + 500$$

Y como se ve, esta ecuación es distinta a la utilizada por la empresa A.

La afirmación en III) también es falsa, porque si se elimina el cargo fijo de la empresa B, la tarifa de esta empresa se calcula como $y = bx$, luego, por ejemplo, para los valores $b = 1.000$, $a = 1$ y un consumo de $x = 1$ se tienen las siguientes tarifas por empresa:

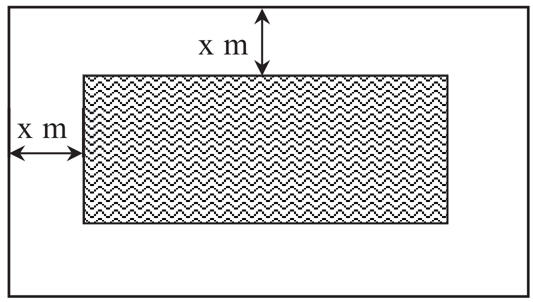
Empresa A: $y = 1 + 750 = 751$
Empresa B: $y = 1.000 \cdot 1 = 1.000$

Por lo tanto, no siempre conviene la empresa B.

Como solo la afirmación en I) es verdadera, la clave es A).

PREGUNTA 24

Se tiene una piscina con forma rectangular de $4\ \mathrm{m}$ de ancho y $10\ \mathrm{m}$ de largo. Se desea colocar un borde de pasto de ancho $x\ \mathrm{m}$ como se representa en la figura adjunta.



Si el área de la superficie total que ocupa la piscina y el borde de pasto, es de $112\ \mathrm{m}^2$, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el valor de x?

A) $x^2 + 40 = 112$

B) $x^2 + 14x = 72$

C) $2x^2 + 7x = 18$

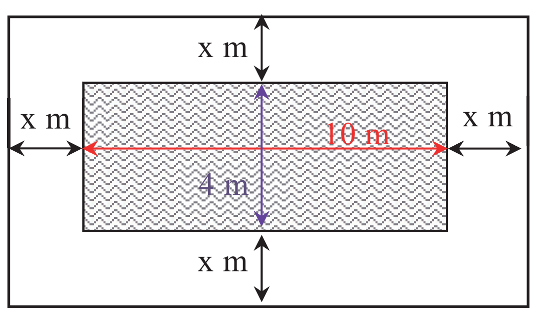
D) $x^2 + 7x = 18$

E) $4x^2 + 40 = 112$

RESOLUCIÓN

Una manera de resolver este problema es visualizar en la figura los datos dados en la pregunta, para luego formular una ecuación que permita determinar el valor de x.

Del enunciado se sabe que el borde del pasto tiene un ancho de $x\ \mathrm{m}$ y que la piscina tiene un ancho de $4\ \mathrm{m}$ y un largo de $10\ \mathrm{m}$, como se muestra en la siguiente figura.



De la figura se puede concluir que las medidas de los lados de la superficie total que ocupa la piscina y el borde de pasto son $(2x + 4)$ m de ancho y $(2x + 10)$ m de largo.

Como el área de la superficie total que ocupa la piscina y el borde de pasto es 112 m^2, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$(2x + 4)(2x + 10) = 112$$

Desarrollando esta ecuación se tiene que:

Aplicando
$(2x + 4)(2x + 10) = (2x)^2 + (4 \cdot 2 + 2 \cdot 10)x + 4 \cdot 10$

$$(2x + 4)(2x + 10) = 112$$
$$4x^2 + 28x + 40 = 112$$

Sumando –40 a ambos lados de la ecuación.

$$4x^2 + 28x = 72$$
$$x^2 + 7x = 18$$

Dividiendo por 4 en ambos lados de la ecuación.

Ecuación que se encuentra en la opción D).

PREGUNTA 25

¿Cuál es el conjunto de todos los números reales c para los cuales la ecuación $x^2 + 5x - c = 0$, **NO** tiene solución en el conjunto de los números reales?

A) $\left]\frac{25}{4}, \infty\right[$

B) $\left]-\frac{25}{4}, \infty\right[$

C) $\left]-\infty, \frac{25}{4}\right[$

D) $\left]-\infty, -\frac{25}{4}\right[$

E) ϕ

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema debes recordar que:

en una ecuación cuadrática de la forma $px^2 + qx + r = 0$, con p, q y r números reales y p distinto de cero, si las soluciones de dicha ecuación son dos números no reales, entonces $q^2 - 4pr < 0$.

De esta forma, para la ecuación $x^2 + 5x - c = 0$, se tiene que $p = 1$, $q = 5$ y $r = -c$.

Luego, para determinar todos los números reales c para los cuales la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, se plantea la inecuación $5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c) < 0$, luego al despejar c se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c) &< 0 \\
25 + 4c &< 0 \\
4c &< -25 \\
c &< -\frac{25}{4}
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales para todos los valores de c menores que $-\frac{25}{4}$, es decir, para los números pertenecientes al intervalo $\left]-\infty, -\frac{25}{4}\right[$, el cual se encuentra en la opción D).

PREGUNTA 26

Considere la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = -c$, con a, b y c números reales. ¿Cuál de las siguientes condiciones es suficiente para concluir que las soluciones de dicha ecuación tienen parte real igual a cero y parte imaginaria distinta de cero?

A) $b^2 - 4ac = 0$

B) $c < 0$

C) $b = 0$ y $c > 0$

D) $b = 0$ y $ac < 0$

E) $b = 0$ y $ac > 0$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe analizar las condiciones que debe cumplir una ecuación de segundo grado para que sus soluciones tengan parte real igual a cero y parte imaginaria distinta de cero.

Recuerde que:

en una ecuación cuadrática de la forma $px^2 + qx + r = 0$, con p, q y r números reales y p distinto de cero, se cumple que:

◊ si $q^2 - 4pr < 0$, entonces las soluciones de dicha ecuación son dos números complejos no reales.
◊ si la solución es un número complejo con parte real igual a cero, entonces $q = 0$.

Del enunciado se tiene la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = -c$ que es equivalente a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Ahora, de la pregunta se desprende que las soluciones de la ecuación anterior no son números reales, por lo que $b^2 - 4ac < 0$ y además, se deben determinar las condiciones para que las soluciones tengan parte real igual a cero y parte imaginaria distinta de cero, lo que implica que $b = 0$.

Así, se tiene lo siguiente:

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{y} \quad b = 0$$

$$-4ac < 0$$

$$ac > 0$$

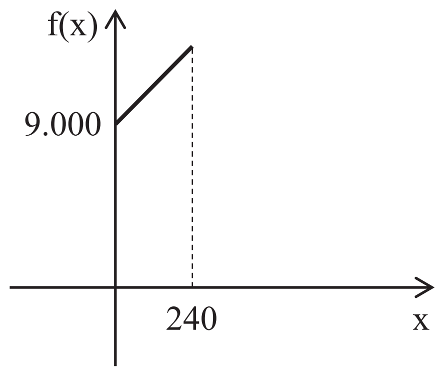
Dividiendo por –4 en ambos lados de la desigualdad.

De esta manera, las condiciones pedidas son $b = 0$ y $ac > 0$, las cuales se encuentran en la opción E).

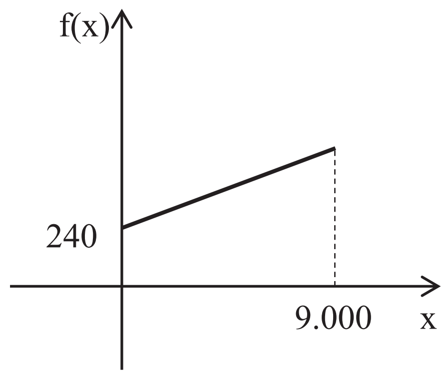
PREGUNTA 27

La tarifa de cierta compañía de telefonía consta de un cargo fijo mensual de $\$ 9.000$ más un cargo de $\$ 50$ por minuto que se habla. Si durante los primeros 240 minutos esta tarifa se modela mediante una función de la forma $f(x) = mx + n$, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la gráfica de f ?

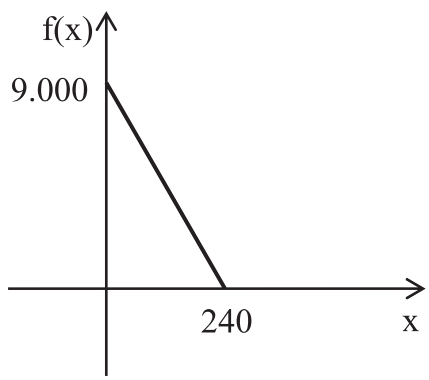
A)



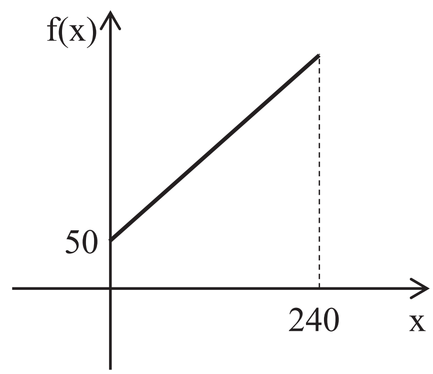
B)



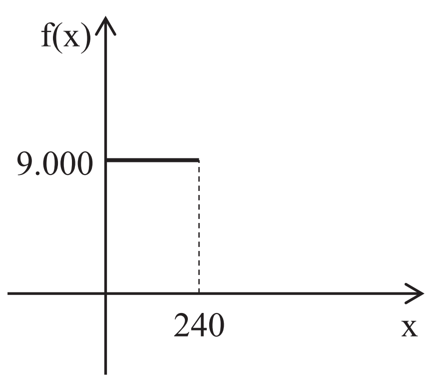
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

Para determinar la función $f(x)$ que modela la tarifa de la compañía de telefonía, se debe considerar que esta se realiza en base a un cargo fijo mensual de $\$ 9.000$ más un cargo de $\$ 50$ por minuto que se habla.

Así, si x es la cantidad de minutos que se habla en el mes, se tiene que cuando no hable ningún minuto, es decir, cuando $x = 0$, el valor de $f(x)$ debe ser 9.000, como ocurre en los gráficos A) y E). Pero luego, por cada minuto que hable el valor de $f(x)$ debe aumentar, lo que no ocurre en el gráfico E) y si ocurre en el gráfico A).

La función que determina la tarifa de la compañía de telefonía es $f(x) = 50x + 9.000$, cuyo gráfico es una recta que intersecta al $\text{eje } y$ en el punto $(0, 9.000)$ y tiene pendiente positiva igual a 50, como en la opción A).

PREGUNTA 28

Una empresa de arriendo de autos cobra $\$\ 70.000$ cuando su vehículo A recorre $50\ \text{km}$ y $\$\ 120.000$ cuando su vehículo A recorre $100\ \text{km}$. El cobro que realiza la empresa para el vehículo A, en términos de los kilómetros recorridos, se modela a través de una función de la forma $f(x) = mx + n$.

¿Cuál será el cobro del vehículo A cuando recorra $200\ \text{km}$?

A) $\$\ 200.000$

B) $\$\ 220.000$

C) $\$\ 240.000$

D) $\$\ 280.000$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema necesitamos modelar el cobro de la empresa por kilómetro recorrido mediante la función afín $f(x) = mx + n$ y luego, encontrar el cobro para un recorrido de $200\ \text{km}$, es decir, el valor de $f(200)$.

Para determinar m y n, utilizamos la información entregada:

$$f(50) = 50m + n = 70.000$$
$$f(100) = 100m + n = 120.000$$

Tenemos así, un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver para obtener los valores de m y n.

Al despejar n de la ecuación $50m + n = 70.000$ se obtiene que $n = 70.000 - 50m$. Reemplazando n en $100m + n = 120.000$, se tiene que $100m + 70.000 - 50m = 120.000$.

Al resolver esta ecuación lineal el valor de m es 1.000 y reemplazando este valor, en cualquiera de las dos ecuaciones, el valor de n es 20.000.

De esta manera, la función que modela el cobro de la empresa por kilómetro recorrido es:

$$f(x) = 1.000x + 20.000$$

Luego, $f(200) = 1.000 \cdot 200 + 20.000 = 220.000$, valor que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 29

Sea f una función afín, tal que $f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$ y f^{-1} es su función inversa. Si $f(2) = 4$ y $f^{-1}(3) = 5$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(4) + f(5) + f^{-1}(f(4))$?

A) 6
B) 7
C) 9
D) 10
E) 13

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe aplicar la definición de función inversa, por lo que se debe recordar lo siguiente:

> considere la función g, tal que $g: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$ y g^{-1} es su función inversa, entonces si $g(a) = b$, entonces $g^{-1}(b) = a$ y $g^{-1}(g(b)) = b$.

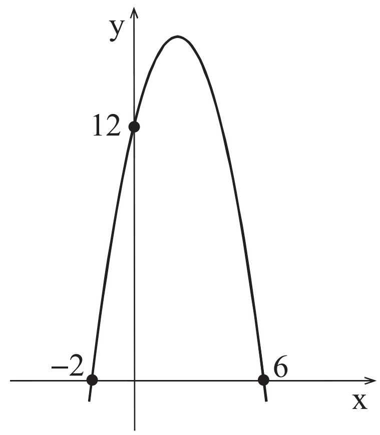
Así, se pueden establecer las siguientes relaciones:

- Si $f(2) = 4$, entonces se tiene que $f^{-1}(4) = 2$.
- Si $f^{-1}(3) = 5$, entonces se tiene que $f(5) = 3$.
- $f^{-1}(f(4)) = 4$

Luego, $f^{-1}(4) + f(5) + f^{-1}(f(4)) = 2 + 3 + 4 = 9$, valor que se encuentra en la opción C).

PREGUNTA 30

La figura adjunta representa la parábola asociada a la función cuadrática f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales.



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El eje de simetría de la parábola es la recta de ecuación $x = 2$.

II) Si $-2 < x < 6$, entonces $f(x) < 0$.

III) $f(7) = f(-3)$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y II

E) Solo I y III

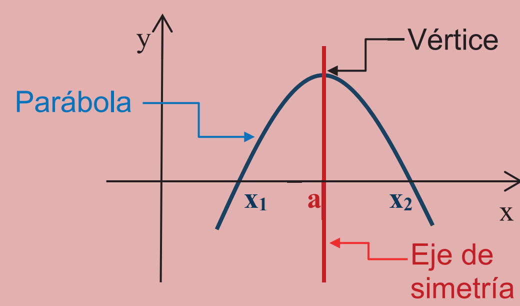
RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) son verdaderas.

Recuerde que:

◊ la parábola asociada a una función cuadrática es simétrica con respecto a una recta de ecuación de la forma $x = a$ llamada eje de simetría de la parábola.

◊ si $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ son los puntos de intersección de la parábola con el eje x, se tiene que el eje de simetría es la recta de ecuación $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.



Del gráfico se tiene que los puntos $(-2, 0)$ y $(6, 0)$ pertenecen a la parábola y al tener la misma ordenada son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola, es decir, tienen la misma distancia al eje de simetría.

Como los puntos $(-2, 0)$ y $(6, 0)$ son los puntos de intersección de la parábola con el eje x, se tiene que la ecuación del eje de simetría es $x = \dfrac{-2 + 6}{2}$, es decir, $x = 2$, siendo la afirmación en I) verdadera.

La afirmación en II) es falsa, lo cual se puede verificar a través de un contraejemplo, ya que para $x = 0$ se tiene que $-2 < 0 < 6$ y $f(0) = 12 > 0$.

Por último, para verificar que $f(7) = f(-3)$ en III), basta ver que -3 está una unidad a la izquierda de donde la parábola interseca al eje x en -2 y 7 está una unidad a la derecha de donde la parábola interseca al eje x en 6, es decir, son puntos simétricos con respecto al eje de simetría $x = 2$, de lo cual se deduce que $f(-3) = f(7)$.

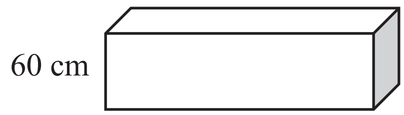
Si quisiéramos asegurarnos de esto, también podríamos obtener una expresión para $f(x)$ a partir de los puntos del gráfico. Para que $f(-2) = 0$ se necesita que $(x+2)$ sea un factor de $f(x)$. Para que $f(6) = 0$ se necesita que $(x-6)$ sea también un factor de $f(x)$ y por lo tanto $f(x) = a(x+2)(x-6)$, donde a debe ser tal que $f(0) = 12$, es decir, $f(0) = a(0+2)(0-6) = 12$, lo que se obtiene con $a = -1$.

Entonces, como $f(x) = -(x+2)(x-6)$ se tendrá que $f(-3) = -9$ y $f(7) = -9$, lo que ratifica nuestra conclusión previa y que III) es verdadera.

De esta forma, solo las afirmaciones en I) y en III) son verdaderas, luego la opción correcta es E).

PREGUNTA 31

En el paralelepípedo recto de la figura adjunta, el largo de la base es 10 cm mayor que el ancho de la misma y su altura es de 60 cm.



Si x representa el largo de la base, en cm, ¿cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales mayores que 10, modela el volumen del paralelepípedo en término de su largo, en cm^3?

A) $f(x) = 60x^2 - 600$

B) $g(x) = 60x^2 + 600$

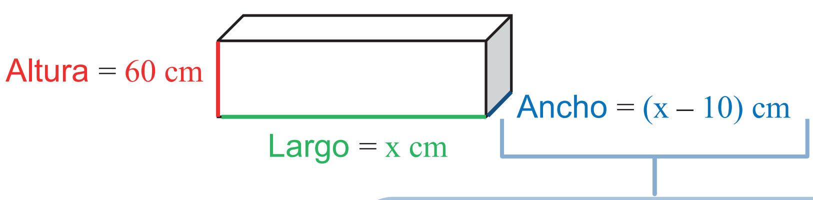
C) $h(x) = 60x^2 - 600x$

D) $j(x) = 60x^2 - 10x$

E) $t(x) = 600x^2$

RESOLUCIÓN

Para determinar la función que representa el volumen del paralelepípedo se pueden representar sus medidas en la figura, como se muestra a continuación:



Como el largo de la base ($x \text{ cm}$) es 10 cm mayor que el Ancho de la misma, se tiene:

$x \text{ cm} =$ Ancho $+ 10 \text{ cm}$, por lo que al despejar el Ancho se tiene Ancho $= (x - 10) \text{ cm}$.

Por otro lado, el volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto entre su altura, su largo y su ancho. Luego, si la función que representa el volumen en términos de x es V, ella queda determinada por la expresión:

$$\begin{aligned} V(x) &= \text{altura} \cdot \text{largo} \cdot \text{ancho} \\ &= 60 \cdot x \cdot (x - 10) \\ &= 60x^2 - 600x \end{aligned}$$

Función que se encuentra en la opción C).

PREGUNTA 32

Considere la función f con dominio el conjunto de los números reales definida por $f(x) = -20 + 15x + 5x^2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a f?

I) Su gráfico intersecta al $\text{eje } x$ en los puntos $(-4, 0)$ y $(1, 0)$.

II) Su gráfico tiene como eje de simetría a la recta $x = -\dfrac{3}{2}$.

III) Su valor máximo es $-\dfrac{25}{4}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a la pregunta se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) en relación a la función cuadrática f.

En I), basta evaluar f en -4 y en 1, así, $f(-4) = -20 + 15(-4) + 5(16) = 0$ y $f(1) = -20 + 15 + 5 = 0$. Es decir, la afirmación en I) es verdadera.

Ahora, para encontrar la ecuación del eje de simetría del gráfico de f se debe recordar que este se encuentra equidistante de los valores de x donde se anula $f(x)$, es decir, es $x = \dfrac{(-4+1)}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

Así, la afirmación en II) es verdadera.

Por último, recuerde que:

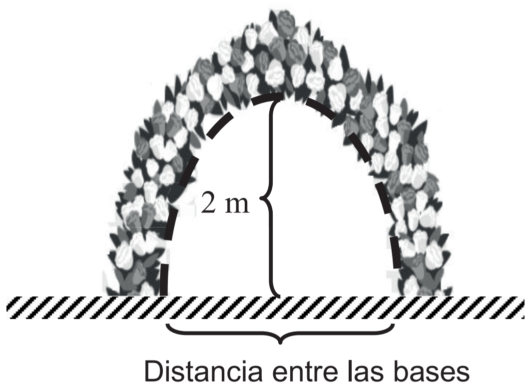
en la función $g(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, si $a > 0$, entonces la parábola asociada a g es cóncava hacia arriba y la función tiene un valor mínimo pero no tiene máximos.

Como en la función $f(x) = -20 + 15x + 5x^2$ el valor de a es positivo, entonces f tiene un mínimo y no un máximo, por lo tanto, la afirmación en III) es falsa.

Como solo las afirmaciones en I) y en II) son verdaderas, la clave es C).

REGUNTA 33

Una florista necesita armar un arco de flores que estará ubicado verticalmente al suelo, para un matrimonio, el cual según las especificaciones de los novios, debe tener la forma de una parábola, como se representa en la figura adjunta.



La función que modela la forma interior del arco de flores está dada por $f(x) = -x^2$.

¿Cuál es la distancia que debe haber entre las bases del arco para que la altura máxima del arco de flores sea de $2\ \text{m}$?

A) $\sqrt{2}\ \text{m}$

B) $2\sqrt{2}\ \text{m}$

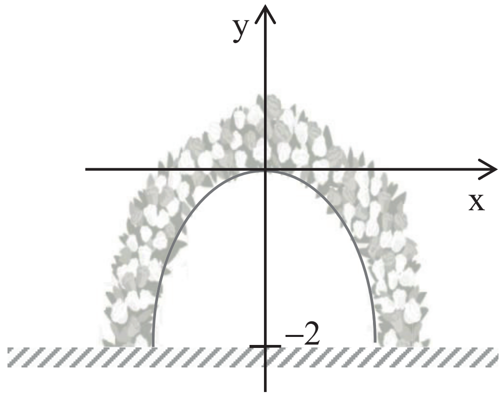
C) $2\ \text{m}$

D) $4\ \text{m}$

RESOLUCIÓN

Para encontrar la distancia que debe haber entre las bases del arco para que la altura máxima del arco de flores sea de $2\ \text{m}$ debemos relacionar el gráfico de la función $f(x) = -x^2$ con el arco.

El vértice de la parábola $f(x) = -x^2$ es el punto $(0, 0)$, por lo que podemos dibujar los ejes coordenados con origen en el vértice de la parábola, como se muestra en la siguiente figura:



Ahora representaremos el suelo por la recta de ecuación $y = -2$, porque la distancia entre el suelo y el punto más alto de la parábola tiene que ser de $2\ \text{m}$.

Así, la abscisa (x) de los puntos en que la parábola intersecta el suelo satisface la igualdad $f(x) = -2$, luego tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2 \\
-x^2 &= -2 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \pm\sqrt{2} \\
x = \sqrt{2} \ &\text{ó}\ x = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Por lo que, los puntos donde la parábola intersectan el suelo son $(\sqrt{2}, -2)$ y $(-\sqrt{2}, -2)$ y la distancia entre ellos es la diferencia positiva entre las abscisas de estos puntos, es decir,

$$\sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \text{m}$$

Medida que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 34

Considere la función $f(x) = x^3$ con dominio el conjunto de los números reales. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s), para todo número real?

I) $f(-x) = f(x)$

II) $f(-x) = -f(x)$

III) $f(x - 1) < f(x)$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y III

E) Solo II y III

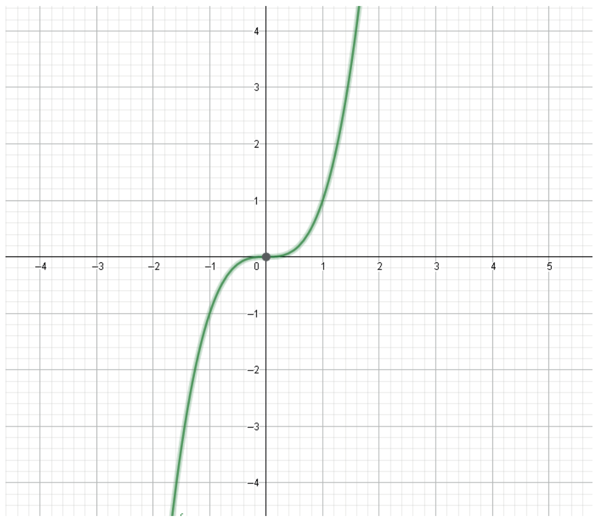
RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe analizar las relaciones presentadas en I), en II) y en III) y determinar cuál de ellas es verdadera, para todo número real x.

Se tiene que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$, mientras que $f(x) = x^3$, por lo que $f(-x) \neq f(x)$, de manera que la relación presentada en I) es falsa.

Por otra parte, se tiene que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ y $-f(x) = -x^3$, por lo que $f(-x) = -f(x)$, de manera que la relación presentada en II) es verdadera.

Ahora, una forma de visualizar la relación dada en III), es a través del gráfico de la función $f(x) = x^3$, el que se muestra a continuación:



Luego, como se cumple que $x - 1 < x$, y se ve del gráfico que $f(x)$ es una función creciente, es decir que al aumentar el valor de x también aumenta el valor de $f(x)$ se puede concluir que $f(x - 1) < f(x)$, por lo que la relación en III) es verdadera.

Del análisis anterior se tiene que solo las relaciones dadas en II) y en III) son verdaderas, por lo tanto, la respuesta correcta es E).

PREGUNTA 35

Considere la función $f(x) = mx + n$ con dominio el conjunto de los números reales. Se puede determinar el valor de n, si se conoce:

(1) el punto de intersección de la gráfica de f con el $\text{eje } y$.

(2) el valor de la pendiente de la gráfica de f y las coordenadas de un punto en la gráfica de f.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema, recuerde que:

◊ la gráfica de una función afín de la forma $g(x) = px + q$ es una recta que interseca al $\text{eje } y$ en el punto $(0, q)$ y p representa el valor de la pendiente de la gráfica de g.

◊ la ecuación de la recta $y = px + q$ asociada a la gráfica de g queda determinada cuando se conoce su pendiente y un punto de ella.

Como en (1) se dice que se conoce el punto de intersección de la gráfica de f con el $\text{eje } y$, entonces se conoce el punto $(0, n)$, de esta manera se conoce el valor de n.

Por otro lado, en (2) se señala que se conoce el valor de la pendiente de la gráfica de f y se conocen las coordenadas de un punto de dicha gráfica, luego con esta información se puede determinar la ecuación de la recta asociada a la gráfica de f y así, se conoce el valor de n.

Luego, como se puede derminar el valor de n con la información dada en (1) y con la información dada en (2) por separado, se tiene que la opción correcta es D).

PREGUNTA 36

Considere los vectores $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-8, 5)$ y $\vec{w} = (-5, -3)$. ¿Cuál de los siguientes vectores corresponde al vector $\left(2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}\right)$?

A) $(-3, -6)$

B) $(-3, 1)$

C) $(-3, -16)$

D) $(-19, -6)$

E) $(-19, -16)$

RESOLUCIÓN

Para responder a esta pregunta se necesita realizar operaciones con vectores, por lo que se debe recordar que:

dado los vectores $\vec{r} = (e, f)$ y $\vec{w} = (g, h)$, se cumple que:

- ◊ $\vec{r} + \vec{w} = (e, f) + (g, h) = (e + g, f + h)$
- ◊ $\vec{r} - \vec{w} = (e, f) + (-g, -h) = (e - g, f - h)$
- ◊ $k\vec{r} = k(e, f) = (ke, kf)$, con k un número real

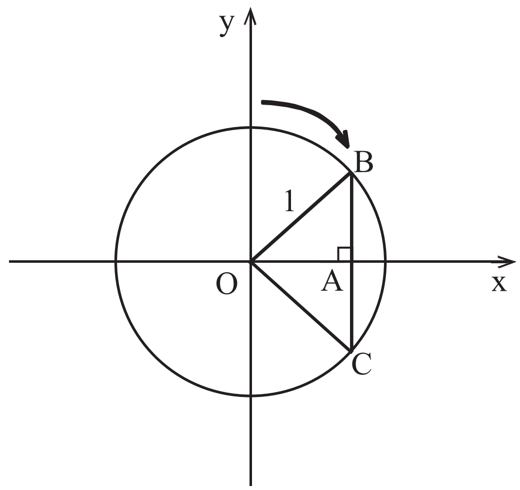
De esta manera, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
\left(2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}\right) &= \\
2(2, -1) - (-8, 5) + 3(-5, -3) &= \\
(4, -2) + (8, -5) + (-15, -9) &= \\
(4 + 8, -2 - 5) + (-15, -9) &= \\
(12, -7) + (-15, -9) &= \\
(12 - 15, -7 - 9) &= \\
(-3, -16)
\end{aligned}$$

Vector que se encuentra en la opción C).

PREGUNTA 37

La circunferencia de centro O de la figura adjunta tiene radio 1, B y C pertenecen a ella y en el $\Delta\ \mathrm{CBO}$ la altura $\overline{\mathrm{OA}}$ mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a rotaciones de la circunferencia en torno al origen O del sistema de ejes coordenados, en el sentido de la flecha?

I) Si se gira en $30°$, entonces el punto B queda en $(1, 0)$.

II) Si se gira en $60°$, entonces el punto B queda en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

III) Si se gira en $60°$, entonces el punto C queda en $(0, -1)$.

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este problema es completando la figura adjunta con los datos que se dan en el enunciado, para luego determinar cuál de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) es verdadera.

Recuerde que:

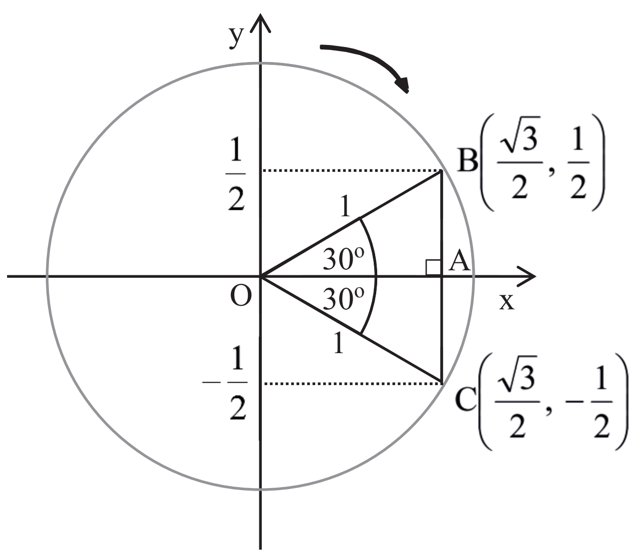
en un triángulo equilátero, donde la medida de cada lado es x:

◊ cada altura es de medida $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

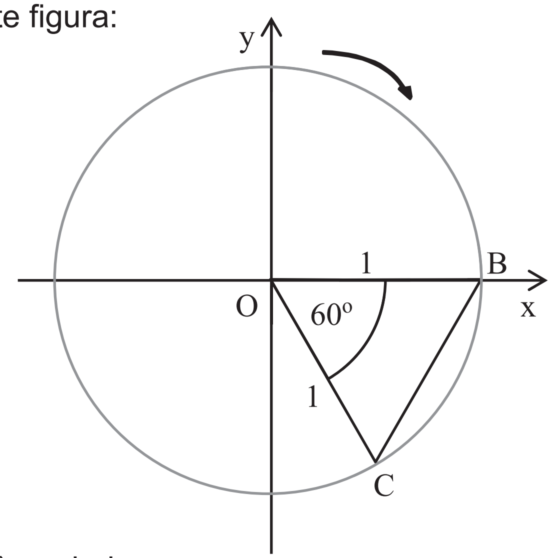
◊ todos sus ángulos interiores miden $60°$.

◊ las alturas coinciden con las bisectrices.

Así, como el Δ CBO es isósceles de lados de medida 1 y su altura $\overline{OA}$ tiene medida $\frac{\sqrt{3}}{2}$, se deduce que este es un triángulo equilátero de lados de medida 1, tal como se muestra en la siguiente figura:

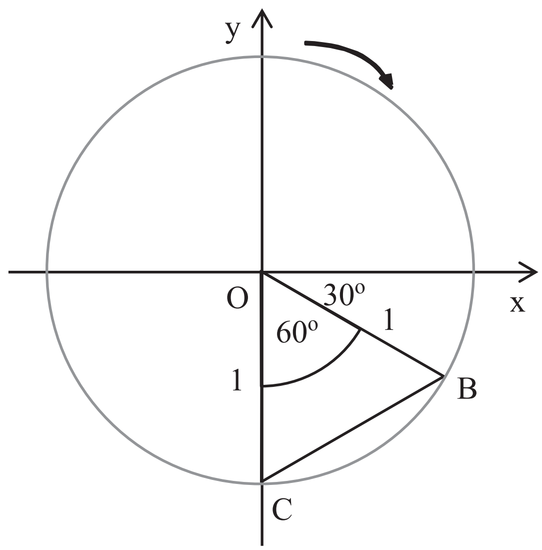


Ahora, al rotar la circunferencia en $30°$ en el sentido de la flecha, el punto B queda en el $\text{eje } x$ y como $OB = 1$ se tiene que dicha imagen es $(1, 0)$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Así, la afirmación en I) verdadera.

Por otro lado, al rotar la circunferencia en $60°$ en el sentido de la flecha, el punto C queda en el $\text{eje } y$ tal como se muestra a continuación:



Como el ángulo que forma el semieje positivo de x con el lado $\overline{OB}$ del triángulo mide $30°$, se tiene que B coincide con la posición original de $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, además, como C queda en el $\text{eje } y$ y $OC = 1$, sus coordenadas son $(0, -1)$, siendo las afirmaciones en II) y en III) verdaderas.

De esta forma, la opción correcta es E).

PREGUNTA 38

Emilia y Martín crean un juego de movimientos dibujando un plano cartesiano en el suelo, de manera que pueden indicar su ubicación utilizando pares ordenados. Las indicaciones del juego son: primero, rotar $90°$ en sentido antihorario respecto al origen, luego, realizar una simetría respecto al eje x y por último, otra simetría respecto al eje y.

Al comenzar el juego, Emilia se encuentra en el punto (a, b) y Martín en el punto (c, d), con a, b, c y d números reales mayores que cero y distintos entre sí.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a las ubicaciones de Emilia y Martín durante el juego?

A) Al realizar la rotación, Emilia y Martín se ubican en el cuarto cuadrante.

B) Emilia y Martín finalizan el juego en los puntos $(a, -b)$ y $(c, -d)$.

C) La distancia entre Emilia y Martín al finalizar el juego es la misma que cuando comenzaron.

D) Emilia y Martín finalizan el juego ubicados en el tercer cuadrante.

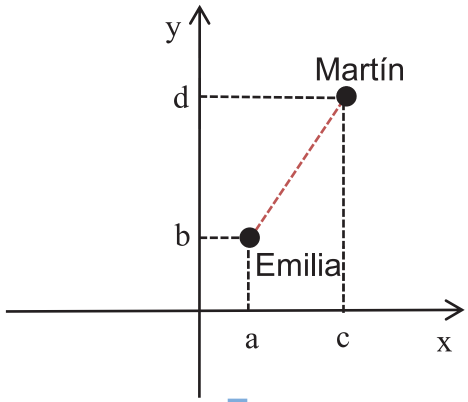
RESOLUCIÓN

Una forma de responder esta pregunta es representar en el plano cartesiano la información entregada en el enunciado, para así determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es verdadera.

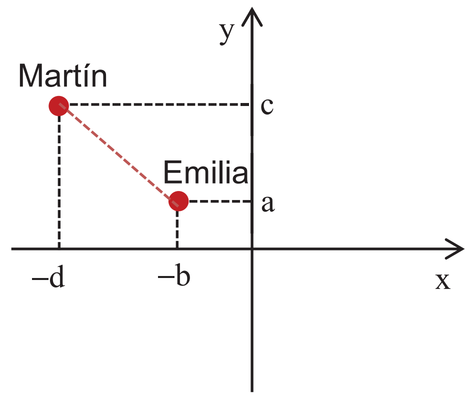
Recuerde que:

- ◊ al rotar un punto (x, y) en $90°$ con respecto al origen del plano cartesiano y en sentido antihorario, se obtiene el punto $(-y, x)$.
- ◊ el simétrico del punto (x, y) con respecto al eje x es el punto $(x, -y)$.
- ◊ el simétrico del punto (x, y) con respecto al eje y es el punto $(-x, y)$.

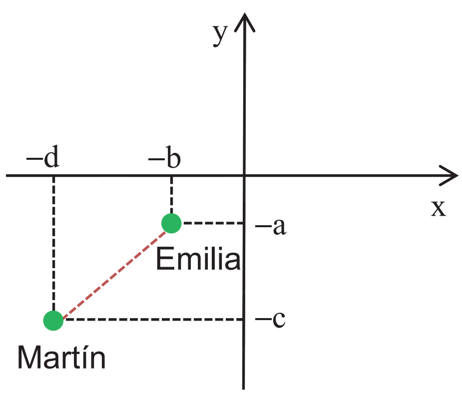
Como a, b, c y d son números reales mayores que cero y distintos entre sí, entonces los puntos (a, b) y (c, d) están ubicados en el primer cuadrante del plano cartesiano y se pueden realizar los movimientos isométricos indicados en el enunciado de la siguiente manera:



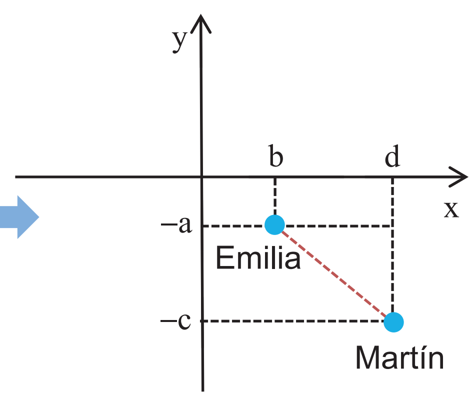
Primera indicación del juego: rotar los puntos en $90°$ en sentido antihorario respecto al origen.



Segunda indicación del juego: realizar una simetría respecto al $\text{eje } x$.



Tercera indicación del juego: realizar una simetría respecto al $\text{eje } y$.



Luego, al analizar las opciones se tiene que:

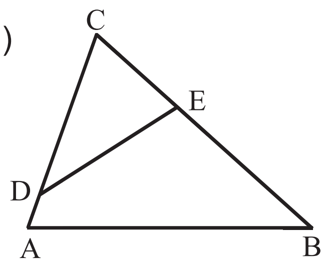
- La opción A) es falsa, porque al realizar la rotación, Emilia y Martín se ubican en el segundo cuadrante.
- La opción B) es falsa, porque Emilia y Martín finalizan el juego en los puntos $(b, -a)$ y $(d, -c)$, respectivamente.
- La opción C) es verdadera, porque el segmento que une los puntos de ubicación de Emilia y Martín al inicio del juego debe ser igual al segmento que une los puntos de ubicación de estas personas al final del juego, y esto es así, pues las transformaciones isométricas no producen modificaciones a las distancias.
- Por último, la opción D) es falsa, porque Emilia y Martín finalizan el juego ubicados en el cuarto cuadrante.

Así, la clave de la pregunta es C).

PREGUNTA 39

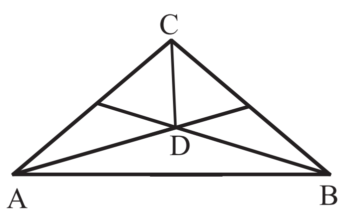
¿En cuál(es) de los siguientes casos se verifica(n) **siempre** la semejanza planteada?

I)



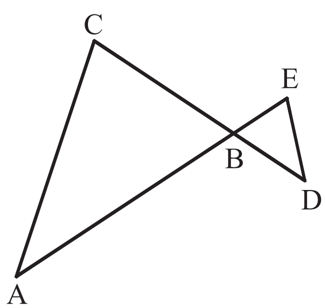
Si AC = 6 cm, DC = 5 cm, BC = 10 cm y EC = 3 cm, entonces Δ ABC ~ Δ EDC.

II)



Si los rayos AD y BD son bisectrices del Δ ABC, entonces Δ ADC ~ Δ BDC.

III)



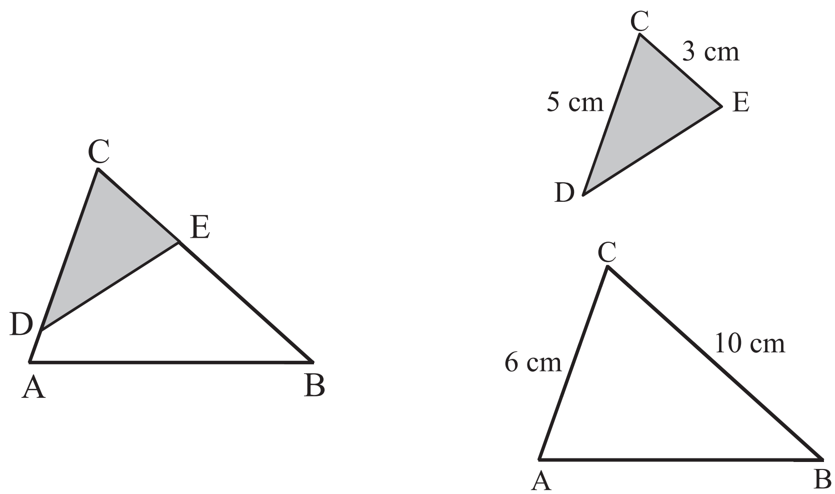
Si AB = 21 cm, BC = 15 cm, BD = 7 cm y BE = 5 cm, entonces Δ ABC ~ Δ DBE.

A) Solo en I
B) Solo en II
C) Solo en III
D) Solo en I y en II
E) Solo en I y en III

RESOLUCIÓN

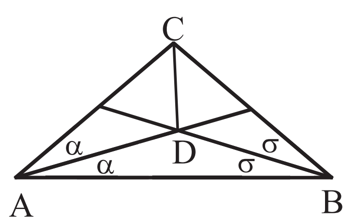
Para responder esta pregunta hay que interpretar los datos en cada una de las figuras dadas en I), en II) y en III).

Ahora, para que determinemos si los triángulos dados en I) son semejantes, la figura se separará en dos triángulos y se pondrán en ellos los datos dados, como se representa a continuación:



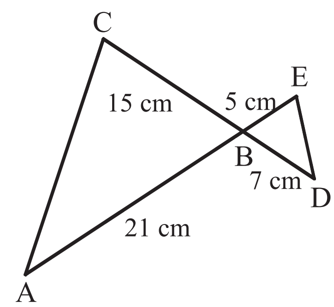
De las figuras se tiene $\frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$, es decir, $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$, además $\sphericalangle\ ACB = \sphericalangle\ DCE$, por ser un ángulo común a los dos triángulos, luego por el criterio de semejanza LAL se cumple que $\Delta\ ABC \sim \Delta\ EDC$.

Ahora, en la figura dada en II) se tiene que el rayo AD es bisectriz del $\sphericalangle\ CAB$, luego $\sphericalangle\ CAD = \sphericalangle\ DAB$ y que el rayo BD es bisectriz del $\sphericalangle\ CBA$, luego $\sphericalangle\ CBD = \sphericalangle\ DBA$, tal como se representa en la siguiente figura:



Con estos datos no se puede afirmar que $\Delta\ ADC \sim \Delta\ BDC$, pues las medidas de los ángulos no son necesariamente iguales ni se tiene información sobre la existencia de lados proporcionales.

Por último en III), al colocar las medidas de los segmentos dados en la figura se tiene lo siguiente:

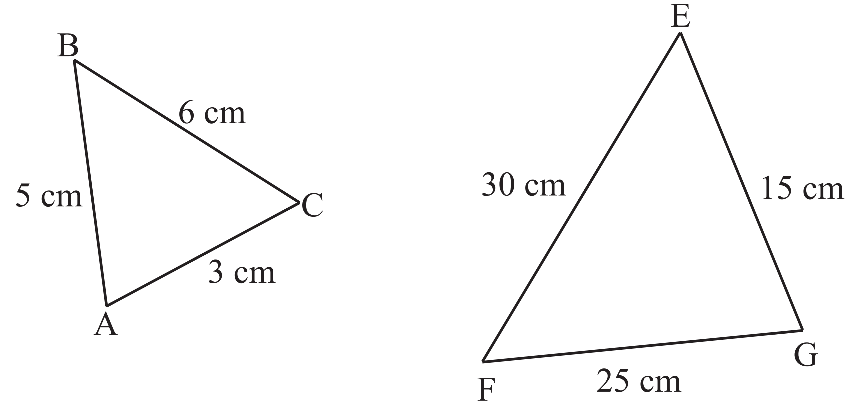


Así, se tiene $\frac{\overline{CB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$, es decir, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$, además $\measuredangle\ CBA = \measuredangle\ EBD$, al ser ángulos opuestos por el vértice, luego por el criterio de semejanza LAL se cumple que $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DBE$.

Como solo en I) y en III) se verifican las semejanzas entre los triángulos planteados, la opción correcta es E).

PREGUNTA 40

En la figura adjunta los triángulos ABC y GFE son semejantes entre sí.



¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{\text{perímetro } \Delta \text{ ABC}}{\text{perímetro } \Delta \text{ GFE}} = \dfrac{1}{5}$

II) $\dfrac{\text{área } \Delta \text{ ABC}}{\text{área } \Delta \text{ GFE}} = \dfrac{1}{25}$

III) $\measuredangle \text{ BAC} : \measuredangle \text{ FGE} = 1 : 5$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

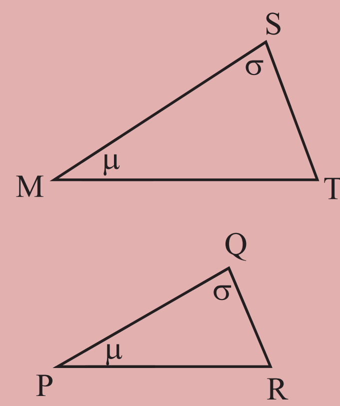
RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta debemos interpretar los datos de los triángulos para verificar cuál de las igualdades dadas en I), en II) y en III) es verdadera.

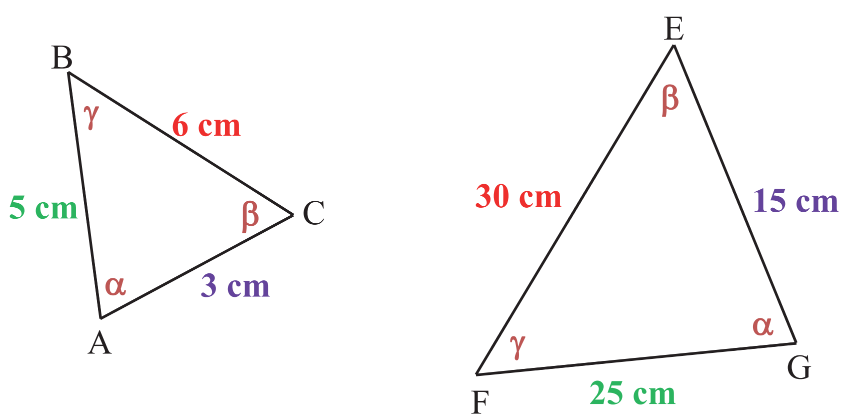
Recuerde que:

dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados homólogos son proporcionales, es decir,

si $\Delta\, MST \sim \Delta\, PQR$, entonces $\dfrac{MS}{PQ} = \dfrac{MT}{PR} = \dfrac{ST}{QR} = k$, con k una constante.



De los triángulos presentados en la pregunta se puede concluir que $\dfrac{BC}{FE} = \dfrac{BA}{FG} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{1}{5}$ y que los pares de ángulos BAC y FGE, ACB y GEF, CBA y EFG son los correspondientes.



Recuerde que:

en dos polígonos semejantes se cumple que:

◊ la razón entre sus perímetros es igual a la razón entre las medidas de dos segmentos homólogos.

◊ la razón entre sus áreas es igual a la razón entre los cuadrados de las medidas de dos segmentos homólogos.

Luego, las igualdades presentadas en I) y en II) son verdaderas, pues se cumple que:

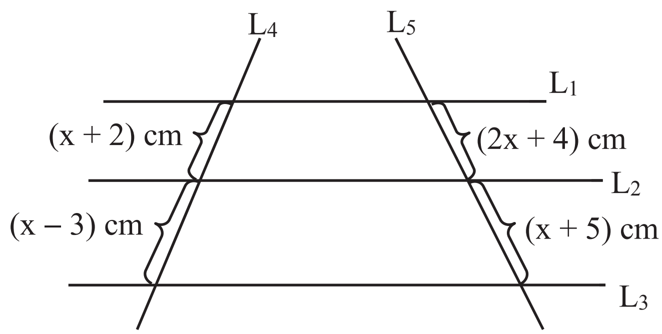
$$\frac{\text{perímetro } \Delta \text{ ABC}}{\text{perímetro } \Delta \text{ GFE}} = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \frac{\text{área } \Delta \text{ ABC}}{\text{área } \Delta \text{ GFE}} = \frac{1}{25}$$

Ahora, la afirmación dada en III) es falsa, pues los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son iguales.

Por lo anterior, la respuesta correcta es C).

PREGUNTA 41

En la figura adjunta las rectas L_4 y L_5 intersectan a las rectas L_1, L_2 y L_3.



¿Qué valor debe tomar x para que $L_1 // L_2 // L_3$?

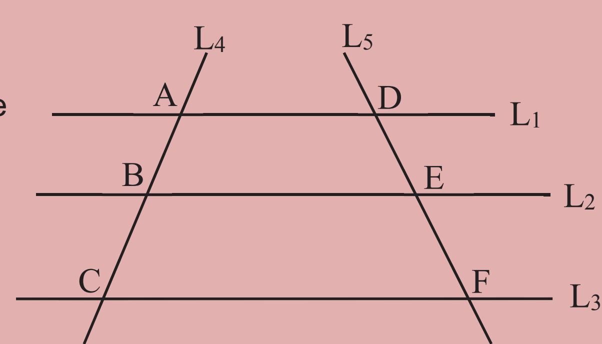
A) $\sqrt{31}$
B) 2
C) 13
D) $\sqrt{22}$
E) 11

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor de x que permite que las rectas L_1, L_2 y L_3 sean paralelas entre sí se debe aplicar el Teorema de Thales.

Recuerde que:

si en la siguiente figura se cumple que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$, entonces $L_1 // L_2 // L_3$.



Luego, aplicando este teorema a la figura dada en el enunciado se tiene:

$$\frac{x+2}{2x+4} = \frac{x-3}{x+5}$$

$$(x+2)(x+5) = (x-3)(2x+4)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 2x^2 - 2x - 12$$

$$0 = x^2 - 9x - 22$$

$$0 = (x-11)(x+2)$$

$$x - 11 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2 = 0$$

Así, los posibles valores para x son $x = 11$ ó $x = -2$, pero este último valor no sirve, porque no existen medidas negativas.

De esta manera, la opción correcta es E).

PREGUNTA 42

Ingrid le hizo a su hijo una copia a escala de la camiseta de fútbol de su marido. El número en la camiseta del marido está dentro de un círculo de área 64 cm^2, si la parte más ancha de la camiseta del marido mide 60 cm y la de su hijo mide 15 cm, ¿cuál es el área del círculo que encierra el número en la camiseta del hijo?

A) 4 cm^2

B) 8 cm^2

C) 14 cm^2

D) 16 cm^2

E) 19 cm^2

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál es el área del círculo que encierra el número en la camiseta del hijo de Ingrid, calcularemos el radio del círculo a partir de las medidas de la camiseta del papá, al estar ambas camisetas en escala.

Lo primero es determinar en qué escala se encuentran las medidas de las camisetas.

Como la parte más ancha de la camiseta del papá mide 60 cm y la de su hijo mide 15 cm, se puede plantear la razón $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, que corresponde a la escala en la que están las medidas lineales de las camisetas.

Ahora, se designará por R el radio del círculo de la camiseta del papá y por r el radio del círculo de la camiseta del hijo.

Recuerde que:

el área de un círculo de radio r se calcula a través de la fórmula $A = \pi r^2$.

Como el área del círculo de la camiseta del papá es 64 cm^2, se tiene que $\pi R^2 = 64 \text{ cm}^2$, de donde $R = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$.

Ahora, como $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, se tiene $\frac{r}{\frac{8}{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{4}$, de donde $r = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ cm.

Luego, el área del círculo de la camiseta del hijo es $\pi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{4}{\pi} = 4 \text{ cm}^2$, valor que se encuentra en la opción A).

También se puede resolver esta pregunta, considerando que como la razón entre las medidas lineales de las camisetas es $\frac{1}{4}$, entonces, las áreas de los círculos de las camisetas están en la razón $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, es decir $\frac{1}{16}$, de esta manera se tiene que:

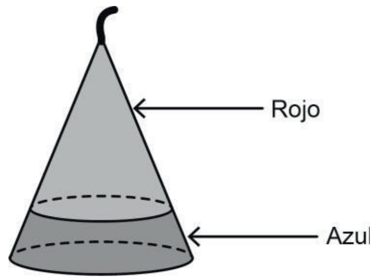
$$\frac{\text{Área del círculo de la polera del hijo}}{\text{Área del círculo de la polera del marido}} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{\text{Área del círculo de la polera del hijo}}{64} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Área del círculo de la polera del hijo} = 64 \cdot \frac{1}{16} = 4 \text{ cm}^2$$

PREGUNTA 43

Constanza fabrica velas de parafina con forma de cono, cada una de dos colores: azul y rojo, como se representa en la figura adjunta.



Constanza quiere fabricar una vela de $12\ \mathrm{cm}$ de altura y de $3\ \mathrm{cm}$ de radio basal, de tal manera que la parte de color rojo tenga una altura de $10\ \mathrm{cm}$.

Recuerde que el volumen de un cono está dado por: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, donde h es su altura y r es el radio de su base.

¿Qué cantidad aproximada de parafina de color azul necesita para fabricar la vela?

Para los cálculos considere π aproximado a 3.

A) $182{,}0\ \mathrm{cm}^3$

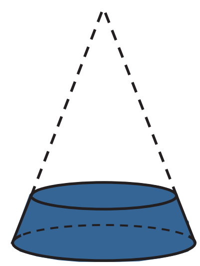
B) $104{,}4\ \mathrm{cm}^3$

C) $98{,}0\ \mathrm{cm}^3$

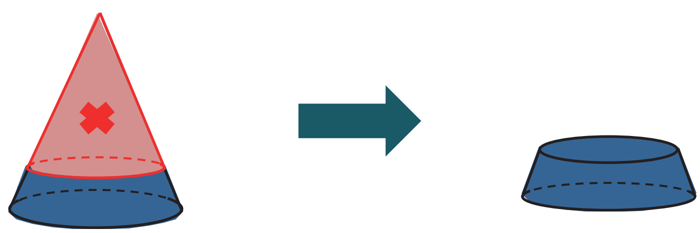
D) $45{,}5\ \mathrm{cm}^3$

RESOLUCIÓN

Para resolver el problema y encontrar la cantidad de parafina de color azul que necesita Constanza para fabricar la vela basta calcular el volumen del cuerpo que se forma con dicha parafina, como se representa a continuación:

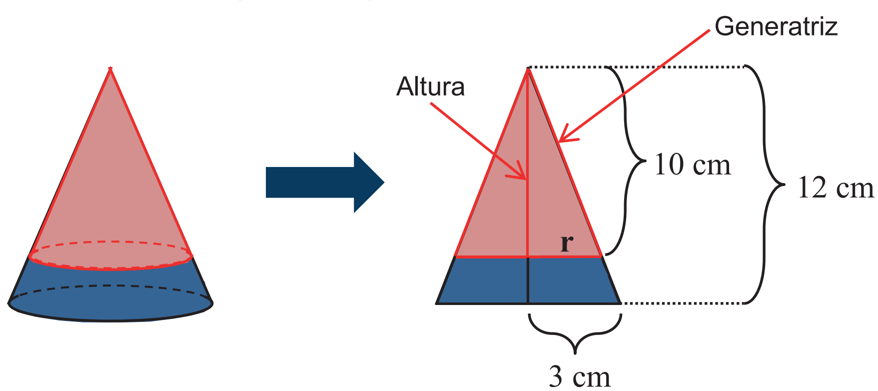


Dicho volumen se puede calcular como la diferencia entre el volumen total de la vela y el volumen del cono rojo, como se representa en la siguiente figura:



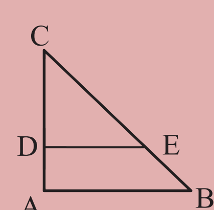
Para ello se debe determinar el radio basal del cono rojo.

Al cortar en dos partes iguales la vela, se tiene que los dos diámetros de las bases de los dos conos son paralelos y luego se traza la generatriz y la altura del cono, como se representa en la siguiente figura.



Recuerde que:

si en el triángulo ABC de la figura adjunta, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{AB}$, entonces se cumple que $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DE}$.



Así, obtenemos que el radio r del cono rojo es:

$$\begin{aligned}\frac{12}{3} &= \frac{10}{r}\\ 12\cdot r &= 10\cdot 3\\ r &= \frac{30}{12}\\ r &= 2{,}5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ahora, se utiliza la fórmula dada en el enunciado $V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$ para calcular el volumen pedido.

$$\begin{aligned}V_{\text{vela azul}} &= V_{\text{vela}} - V_{\text{vela roja}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(3)^2\cdot 12 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2{,}5)^2\cdot 10\\ &= \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 9\cdot 12 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6{,}25\cdot 10\\ &= 108 - 62{,}5\\ &= 45{,}5 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Considerando $\pi = 3$

Valor que se encuentra en la opción D).

PREGUNTA 44

Considere un cuadrado en el plano cartesiano cuyo perímetro es 20 unidades. Si a este cuadrado se le aplica una homotecia de razón 2, ¿cuál es el área, en $\text{unidades cuadradas}$, del nuevo cuadrado?

A) 10

B) 25

C) 40

D) 50

E) 100

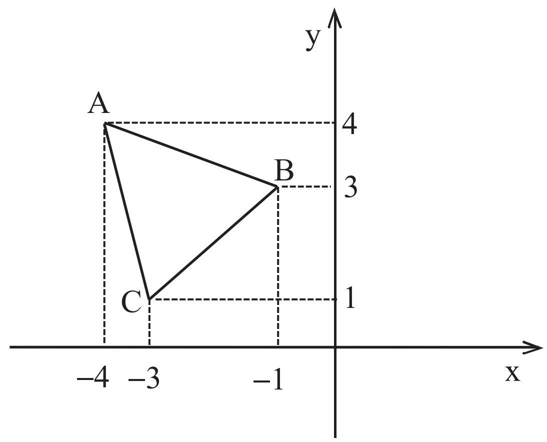
RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este problema es calcular cuánto mide el lado del cuadrado y luego aplicar la homotecia propuesta.

Como el perímetro del cuadrado es 20 unidades, entonces cada lado mide 5 unidades. Ahora, al aplicar la homotecia propuesta se obtendrá un cuadrado cuyo lado mida 10 unidades y por lo tanto, su área será $100 \text{ unidades cuadradas}$, valor que se encuentra en la opción E).

PREGUNTA 45

Al triángulo ABC de la figura adjunta se le aplica una homotecia con centro en el punto $M(-1, 1)$ y razón de homotecia -3, obteniéndose el triángulo PQR.



Si la imagen del punto A es P y la imagen del punto B es Q, ¿cuáles son las coordenadas del punto R?

A) $(9, -3)$

B) $(-6, -2)$

C) $(5, 1)$

D) $(3, 1)$

E) $(9, 1)$

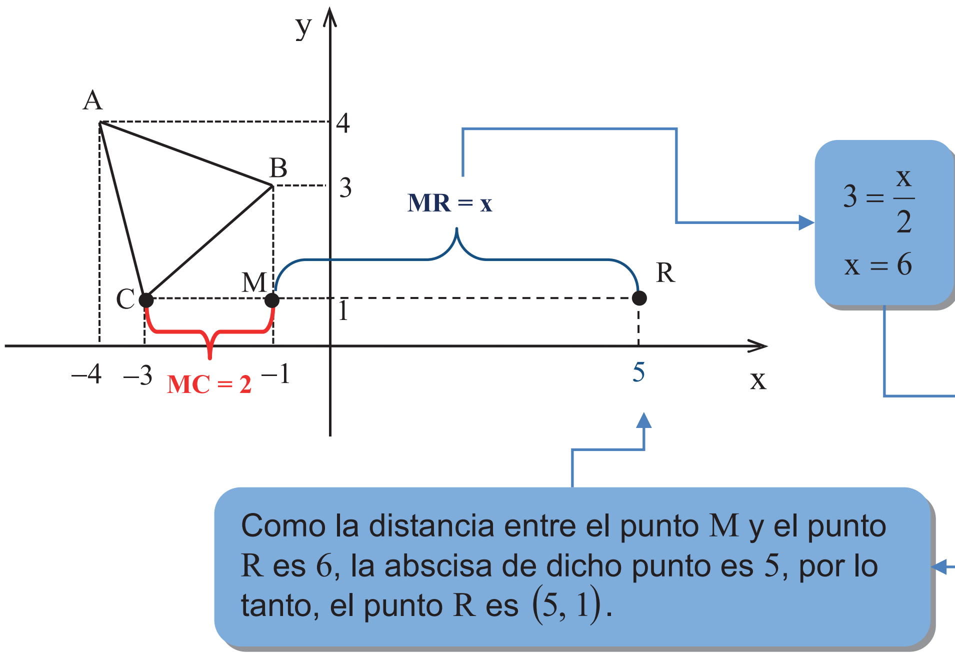
RESOLUCIÓN

Para determinar las coordenadas del punto R se debe aplicar la homotecia planteada en el enunciado al triángulo ABC con vértices de coordenadas $A(-4, 4)$, $B(-1, 3)$ y $C(-3, 1)$, para ello se debe considerar que si la imagen del punto A es P y la imagen del punto B es Q, entonces la imagen de C es R.

Recuerde que:

si al punto L se le aplica una homotecia de razón $r < 0$ y centro en E, se obtiene el punto N, de tal forma que $|r| = \frac{EN}{EL}$ y el punto N se encuentra en sentido del vector $\overrightarrow{LE}$.

Así, en este caso, se tiene la siguiente relación $|-3| = \dfrac{MR}{MC}$ y como la razón de homotecia es negativa, se puede hacer el siguiente gráfico:



De esta manera, la opción correcta es C).

PREGUNTA 46

Si los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(x, x)$ y $D(0, 2)$, con $x > 0$, son los vértices de un cuadrilátero $ABCD$ en el plano cartesiano, ¿cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** el perímetro de dicho cuadrilátero, en unidades?

A) $4 + 2x$

B) $4 + 2\sqrt{(x - 2)^2 + x^2}$

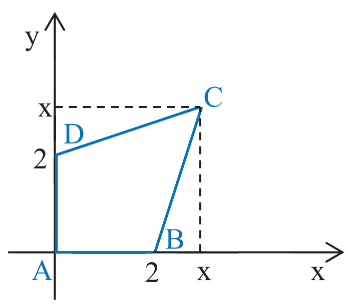
C) $4 + 2\left((x - 2)^2 + x^2\right)$

D) $4 + \sqrt{(x - 2)^2 + x^2}$

E) $4 + 2\sqrt{(x + 2)^2 - x^2}$

RESOLUCIÓN

Representemos los vértices del cuadrilátero $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(x, x)$ y $D(0, 2)$ en el plano cartesiano de la siguiente figura.



Podemos observar que en la figura anterior la medida de los segmentos AB y DA es 2 unidades.

Ahora, para determinar la medida de los segmentos BC y CD se debe recordar que:

> la distancia entre los puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ está dada por
>
> $$D_{PQ} = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

De esta manera, se llega a que:

$$D_{BC} = \sqrt{(x-2)^2 + x^2} \text{ unidades}$$
$$D_{CD} = \sqrt{x^2 + (x-2)^2} \text{ unidades}$$

Luego, al sumar las medidas de los lados del cuadrilátero se obtiene el perímetro de $ABCD$, en unidades, que es:

$$2 + 2 + \sqrt{(x-2)^2 + x^2} + \sqrt{x^2 + (x-2)^2} = 4 + 2\sqrt{(x-2)^2 + x^2}$$

Expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 47

¿En cuál de las siguientes opciones se encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5,\ 0)$ y $(3,\ -1)$?

A) $y = -\frac{x}{8} - \frac{5}{8}$

B) $y = \frac{x}{8} + \frac{5}{8}$

C) $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

D) $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$

E) $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{8}$

RESOLUCIÓN

Una manera de resolver este problema es determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados en el enunciado, escribiéndola de la forma $y = mx + n$.

Recuerde que:

la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(a,\ b)$ y $Q(c,\ d)$, con $a \neq c$, está dada por $(y - d) = \frac{d - b}{c - a}(x - c)$.

Así, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5,\ 0)$ y $(3,\ -1)$ es:

$$y - 0 = \frac{-1 - 0}{3 - (-5)}(x - (-5))$$

$$y = \frac{-1}{8}(x + 5)$$

$$y = -\frac{x}{8} - \frac{5}{8}$$

Ecuación que se encuentra en la opción A).

Otra manera de resolver el problema es ver para cada opción, si la recta propuesta en ella pasa por los dos puntos dados.

Para probar si A) es correcta, evaluamos $y = -\frac{x}{8} - \frac{5}{8}$ en $x = -5$. Claramente se obtiene que $y = 0$, con lo cual esta recta pasa por el punto $(-5, 0)$.

Luego, evaluamos en $x = 3$ y esta vez obtenemos que $y = -1$, de lo que concluimos que la recta pasa por el punto $(3, -1)$.

Así, la opción A) es correcta.

PREGUNTA 48

¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la pendiente de la recta que tiene como ecuación $x + by = c$, con $b \neq 0$?

A) 1

B) $-\dfrac{1}{b}$

C) $\dfrac{1}{b}$

D) -1

E) b

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se debe identificar las componentes de una ecuación de la recta, para ello recuerde que en una recta de ecuacion $y = mx + n$, la pendiente corresponde a m.

Así, al despejar y en la ecuación $x + by = c$, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x + by &= c \\
by &= c - x \\
y &= \frac{c}{b} - \frac{x}{b} \\
y &= \frac{c}{b} + \left(-\frac{1}{b}\right)x
\end{aligned}
$$

De esta forma, la pendiente de la recta dada en el enunciado es igual a $-\dfrac{1}{b}$, expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 49

Las rectas L_1 y L_2 tienen ecuaciones $L_1 : ax + by + c = 0$ y $L_2 : dx + ey + f = 0$, con b y e distintos de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades permite(n) deducir que las rectas L_1 y L_2 son paralelas?

I) $\frac{a}{b} = \frac{f}{e}$

II) $a = d = 0$

III) $c = f = 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema analizaremos las relaciones dadas en I), en II) y en III) para determinar si estas permiten deducir que $L_1 \parallel L_2$.

Recuerde que:

◊ en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + n$, se tiene que m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.

◊ dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, y si además, tienen igual coeficiente de posición estas son paralelas coincidentes.

Al despejar y en cada una de las ecuaciones de las rectas dadas en el enunciado, se tiene que:

- $L_1 :\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, donde $-\frac{a}{b}$ es su pendiente y $-\frac{c}{b}$ es su coeficiente de posición.

- $L_2:\ y = -\frac{d}{e}x - \frac{f}{e}$, donde $-\frac{d}{e}$ es su pendiente y $-\frac{f}{e}$ es su coeficiente de posición.

Ahora, la afirmación dada en I) no permite deducir que $L_1 // L_2$, porque para que estas rectas sean paralelas tendría que ocurrir que $-\frac{a}{b} = -\frac{d}{e}$, que es lo mismo que $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.

En II) se tiene que $a = d = 0$, por lo que las rectas L_1 y L_2 tendrían pendientes iguales a 0, luego la relación dada en este caso permite determinar que estas rectas son paralelas.

Por último, en III) se tiene que $c = f = 0$, que al reemplazarlos en L_1 y en L_2 se obtiene:

$$L_1 : y = -\frac{a}{b}x$$

$$L_2 : y = -\frac{d}{e}x$$

Lo anterior no permite deducir que las rectas L_1 y L_2 sean paralelas, pues no se puede determinar que sus pendientes sean iguales.

Como solo la relación dada en II) permite deducir que $L_1 // L_2$, la opción correcta es B).

PREGUNTA 50

Considere un trapecio isósceles donde sus bases son paralelas al eje x. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a dicho trapecio?

I) Existen rectas que contiene a dos lados del trapecio cuyas pendientes son iguales.

II) La suma de las pendientes de las rectas que contienen los lados no paralelos del trapecio es cero.

III) El producto de las pendientes de las rectas que contienen a las diagonales del trapecio es -1.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

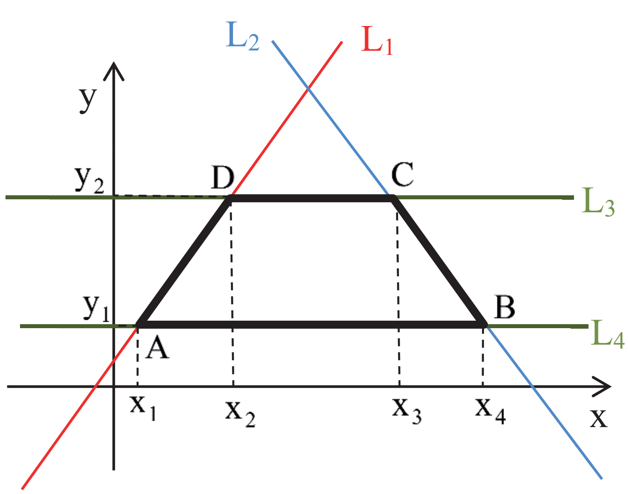
D) Solo I y II

E) Solo I y III

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe determinar cuál de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) es verdadera, en relación a un trapecio con las características dadas en el enunciado.

En la siguiente figura se muestra un trapecio isósceles $ABCD$, donde las rectas L_1 y L_2 contienen a los lados no basales del trapecio y cuyas bases son paralelas al eje x. Además, L_3 y L_4 son las rectas que contienen las bases de dicho trapecio:



Los puntos del trapecio son:
$A(x_1, y_1)$; $B(x_4, y_1)$
$C(x_3, y_2)$; $D(x_2, y_2)$

Como el trapecio es isósceles se tiene que $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$

Como se observa en la figura las rectas L_3 y L_4 tienen pendiente igual a 0, al ser paralelas al $\text{eje } x$, por lo tanto, la afirmación en I) es verdadera.

Para determinar si la afirmación en II) es verdadera, se debe recordar que:

> la pendiente de una recta que pasa por los puntos (p_1, q_1) y (p_2, q_2) es $m = \dfrac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$.

Del gráfico se desprende que las pendientes de las rectas L_1 y L_2 son $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $\dfrac{y_2 - y_1}{x_3 - x_4}$, respectivamente, y su suma es:

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_4} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{-(x_4 - x_3)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_3}\\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ &= 0\end{aligned}$$

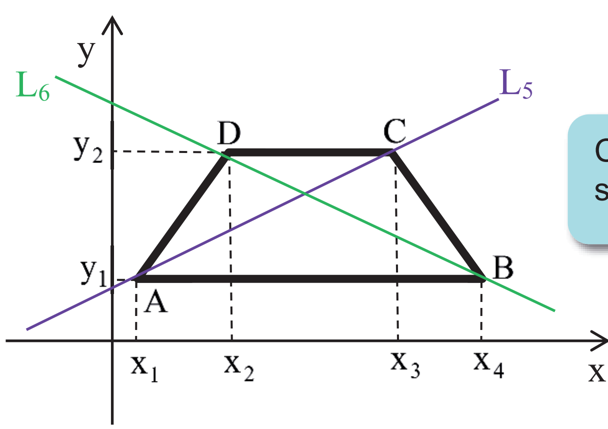
Se aplica $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$

Así, la afirmación en II) es verdadera.

Para determinar si la afirmación en III) es verdadera, se debe recordar que:

> dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es igual a -1.

Al trapecio anterior se le pueden trazar las rectas L_5 y L_6, las cuales contienen las diagonales del trapecio, tal como se muestra a continuación:



Como el trapecio es isósceles se tiene que $x_4 - x_2 = x_3 - x_1$

Del gráfico se desprende que las pendientes de las rectas L_5 y L_6 son $\dfrac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1}$ y $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_4}$, respectivamente, luego la multiplicación entre ellas es:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_4} = \frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{-(x_4 - x_2)} = -\frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_2}$$

$$= -\left(\frac{y_2 - y_1}{x_3 - x_1}\right)^2$$

Se aplica
$x_4 - x_2 = x_3 - x_1$

No hay ninguna razón que permita afirmar que el cociente dentro del paréntesis valga 1. Si se considera, por ejemplo, $y_2 - y_1 = 2$ y $x_3 - x_1 = 1$, el producto de las pendientes es igual a -4 y no es igual a -1 por lo que la afirmación en III) es falsa.

Como solo las afirmaciones en I) y en II) son verdaderas, la clave es D).

PREGUNTA 51

En el plano cartesiano un triángulo ABC isósceles tiene su base $\overline{\mathrm{AB}}$ paralela al eje de las abscisas, las coordenadas de A son $(-1, 1)$ y la abscisa de B es 5. Se pueden determinar exactamente las longitudes de los otros dos lados, si se sabe que:

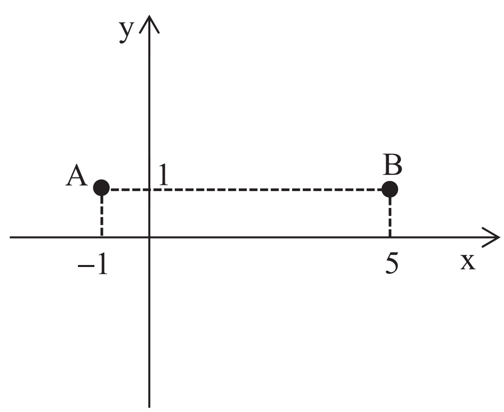
(1) el perímetro del triángulo es 15 unidades.

(2) el punto C está en el primer cuadrante.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

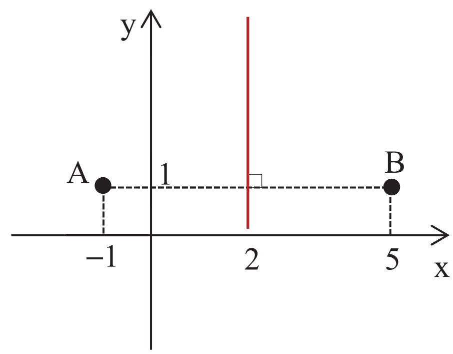
RESOLUCIÓN

Podemos representar la información del enunciado en el plano cartesiano de la siguiente manera:



En (1) se dice que el perímetro del triángulo es 15 unidades, además, de la figura se obtiene que $\mathrm{AB} = 6$ unidades y como $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$, por ser el triángulo isosceles, se puede determinar las longitudes de los otros dos lados, restando al perímetro del triángulo la medida del segmento AB y dividiendo el resultado obtenido por 2.

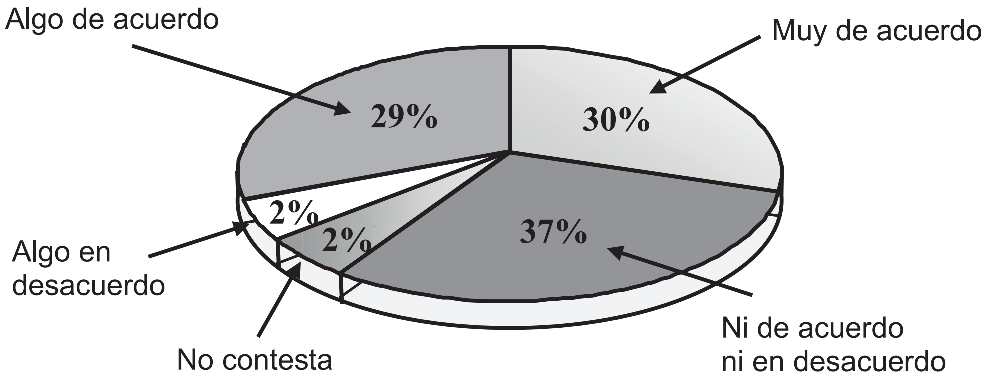
En (2) se dice que el punto C está en el primer cuadrante, luego podría estar en cualquier punto de la parte de la simetral del segmento AB que está en el primer cuadrante, que se muestra en rojo en la siguiente figura, por lo que no se puede determinar en forma exacta las longitudes de los lados $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$.



Como solo con la información dada en (1) se puede determinar las longitudes pedidas, la opción correcta es A).

PREGUNTA 52

El gráfico circular de la figura adjunta muestra los resultados de una encuesta aplicada a 300 estudiantes sobre su nivel de acuerdo sobre la implementación de salas de computación en su colegio.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La frecuencia relativa de los que contestan “Muy de acuerdo” es $\frac{3}{10}$.

B) La frecuencia de los que contestaron “Ni de acuerdo ni en desacuerdo” supera en 8 estudiantes a los que contestaron “Algo de acuerdo”.

C) El nivel de acuerdo de la encuesta es bimodal.

D) 2 estudiantes no contestan la encuesta.

RESOLUCIÓN

Considerando que son 300 los estudiantes encuestados, podemos construir la siguiente tabla:

Categoría	Frecuencia porcentual	Frecuencia
Muy de acuerdo	30	$300 \cdot 0{,}3 = 90$
Algo de acuerdo	29	$300 \cdot 0{,}29 = 87$
Algo en desacuerdo	2	$300 \cdot 0{,}02 = 6$
Ni de acuerdo ni en desacuerdo	37	$300 \cdot 0{,}37 = 111$
No contesta	2	$300 \cdot 0{,}02 = 6$

Así, la frecuencia relativa de los que contestan “Muy de acuerdo” es $\frac{90}{300} = \frac{3}{10}$, luego la afirmación en A) es verdadera.

Para la afirmación en B), se tiene que la frecuencia de los que contestaron “Ni de acuerdo ni en desacuerdo” es 111 y la frecuencia de los que contestaron “Algo de acuerdo” es 87, luego la diferencia entre estas frecuencias es $111 - 87 = 24$, de manera que, la cantidad de estudiantes que contestaron “Ni de acuerdo ni en desacuerdo” supera en 24 a la cantidad de estudiantes que contestaron “Algo de acuerdo” y por lo tanto, la afirmación en B) es falsa.

También es falsa la afirmación dada en C), porque “Ni de acuerdo ni en desacuerdo” es la categoría que tiene la mayor frecuencia, por lo tanto, solo esta categoría sería la moda.

La afirmación dada en D) también es falsa, pues de la tabla se tiene que 6 estudiantes no contestaron la encuesta y no 2.

Por lo anterior, la clave es A).

PREGUNTA 53

En la tabla adjunta se muestra la distribución de las edades, en años, de un grupo de personas.

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia relativa porcentual
$[12, 18[$	8	16
$[18, 24[$	14	
$[24, 30[$		
$[30, 36[$		18
$[36, 42]$	3	

Según los datos de la tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La marca de clase del intervalo de mayor frecuencia es 27 años.

B) Un 44% de las personas tiene menos de 24 años.

C) El grupo en total tiene 50 personas.

D) Exactamente, un 38% de las personas tiene menos de 30 años.

E) 28 personas tienen a lo menos 24 años.

RESOLUCIÓN

Una forma de responder esta pregunta es completar la tabla y luego verificar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es falsa.

En la tabla se muestra que hay exactamente 8 personas con edades en el intervalo $[12, 18[$ y que corresponden al 16% del total, por lo que la cantidad total x de personas del grupo se puede calcular como:

$$\frac{16}{100} = \frac{8}{x}$$
$$16x = 8 \cdot 100$$
$$16x = 800$$
$$x = 50$$

Por lo tanto, podemos completar la tabla de la siguiente manera:

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia relativa porcentual
$[12, 18[$	8	16
$[18, 24[$	14	$\frac{14}{50}\cdot 100 = 28$
$[24, 30[$	$50 - (8 + 14 + 9 + 3) = 16$	$100 - (16 + 28 + 18 + 6) = 32$
$[30, 36[$	$\frac{18}{100}\cdot 50 = 9$	18
$[36, 42]$	3	$\frac{3}{50}\cdot 100 = 6$

La afirmación en A) es verdadera, pues el intervalo de mayor frecuencia es $[24, 30[$ y su marca de clase es $\frac{24 + 30}{2} = 27$.

Por otro lado, las personas que tienen menos de 24 años son las personas con edades en los intervalos $[12, 18[$ y $[18, 24[$ que corresponden al $(16 + 28)\% = 44\%$ de las personas del grupo, siendo la afirmación en B) verdadera.

También la afirmación en C) es verdadera, pues el grupo en total tiene 50 personas tal como se calculó anteriormente.

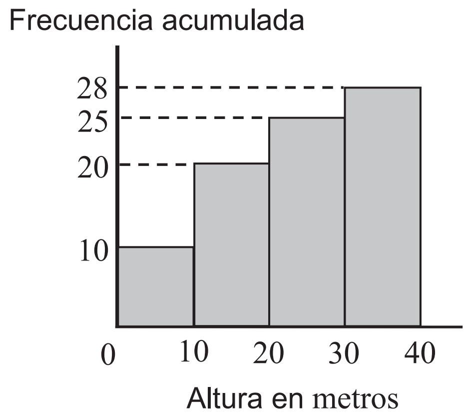
Ahora, la afirmación en D) es falsa, porque las personas que tienen menos de 30 años son las personas con edades en los intervalos $[12, 18[$, $[18, 24[$ y $[24, 30[$ que corresponden al $(16 + 28 + 32)\% = 76\%$ de las personas del grupo.

Por último, las personas que tienen a lo menos 24 años son aquellas cuyas edades están en los intervalos $[24, 30[$, $[30,36[$ y $[36, 42]$ que en total son $16 + 9 + 3 = 28$ personas, siendo la afirmación en E) verdadera.

De lo anterior, la respuesta correcta es D).

PREGUNTA 54

En el gráfico de la figura adjunta se muestra la frecuencia acumulada de las alturas, en metros, de los edificios construidos el último año en una determinada comuna, donde los intervalos son de la forma $[a, b[$ y el último de la forma $[c, d]$. A partir de la información presentada en el gráfico se construye la siguiente tabla de frecuencias.



Altura en metros	Frecuencia
$[0, 10[$	R
$[10, 20[$	S
$[20, 30[$	T
$[30, 40]$	Q

¿Cuáles son los valores de R, S, T y Q?

A) $R = 5$, $S = 15$, $T = 25$ y $Q = 35$

B) $R = 10$, $S = 30$, $T = 60$ y $Q = 100$

C) $R = 10$, $S = 20$, $T = 30$ y $Q = 40$

D) $R = 10$, $S = 30$, $T = 55$ y $Q = 83$

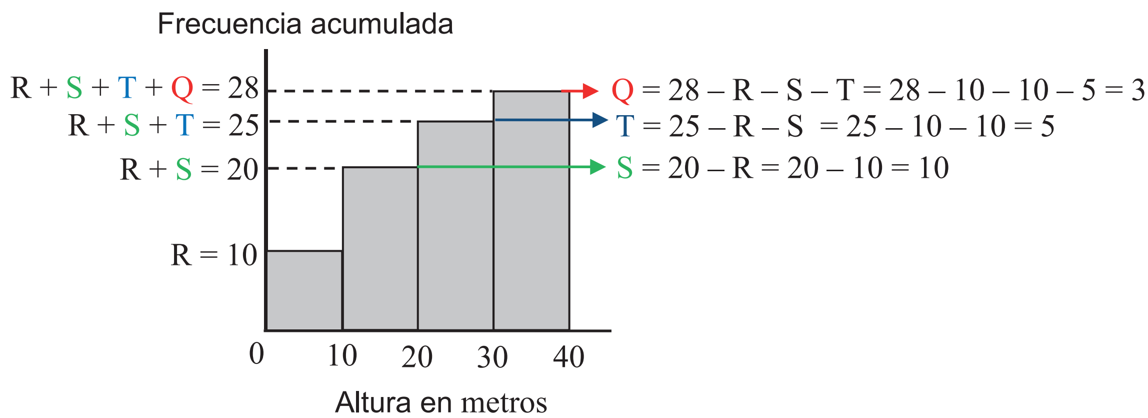
E) $R = 10$, $S = 10$, $T = 5$ y $Q = 3$

RESOLUCIÓN

En la tabla de frecuencias podemos agregar la columna correspondiente a la frecuencia acumulada tal como se muestra a continuación:

Altura en metros	Frecuencia	Frecuencia acumulada
$[0, 10[$	R	R
$[10, 20[$	S	$R + S$
$[20, 30[$	T	$R + S + T$
$[30, 40]$	Q	$R + S + T + Q$

Por otro lado, utilizaremos la información entregada en el gráfico para relacionarla con la información de la tabla, de la siguiente manera:



Luego, se tiene que los valores de R, S, T y Q son 10, 10, 5 y 3, respectivamente, y por lo tanto, la opción correcta es E).

PREGUNTA 55

El contador de la empresa de bolsas plásticas “Plástibol”, va a calcular el promedio de gastos por viaje para abastecer las sucursales de distintas localidades que se realizó en un día determinado. Para lo anterior considera solo los datos de la siguiente tabla:

	Gastos por un viaje		
Localidades	**Bencina ($)**	**Peajes ($)**	**Mantenimiento del vehículo ($)**
San Antonio	8.550	4.500	1.710
Valparaíso	9.020	3.600	1.804
Rancagua	5.380	2.300	1.076
Litueche	9.800	1.900	1.960
Total	32.750	12.300	6.550

El contador sabe que para calcular ese promedio de gastos por viaje para estas localidades debe sumar el total de la bencina, el total del peaje y el total del mantenimiento y luego realizar una división.

Si se consideran los datos de la tabla, ¿por cuánto debe dividir la suma obtenida?

A) Por 3
B) Por 4
C) Por 5
D) Por 15

RESOLUCIÓN

Como se observa en la tabla la cantidad de localidades son 4, luego el promedio de gastos por viaje para estas localidades se calcula como la suma de todos los gastos de la empresa dividido por 4.

Por lo que, la opción correcta es B).

PREGUNTA 56

En la tabla adjunta se muestran las notas por asignatura obtenidas por Rodrigo y Mariel.

Asignatura	Rodrigo	Mariel
Lenguaje	5,2	5,8
Matemática	4,8	5,2
Inglés	5,0	4,0
Ciencias Sociales	6,0	4,5
Ciencias Naturales	4,0	5,5

Si P y Q representan los promedios de las notas de Rodrigo y Mariel, respectivamente, R y S son las medianas de sus respectivas notas, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $P = Q$ y $R > S$

B) $P > Q$ y $R < S$

C) $P = Q$ y $R < S$

D) $P > Q$ y $R > S$

E) $P < Q$ y $R = S$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las relaciones dadas en las opciones es verdadera se puede calcular el promedio y la mediana de las notas de Rodrigo y Mariel, para luego compararlas.

Recuerde que:

◊ el promedio de un conjunto de datos, corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.

◊ la mediana de un grupo de n datos ordenados de menor a mayor, con n un número impar, es el dato que está ubicado en la posición $\frac{n+1}{2}$, que corresponde al centro de los datos.

Así, el promedio y la mediana de las notas de Rodrigo y Mariel son las siguientes:

Rodrigo

- **Promedio**

$$P = \frac{5{,}2 + 4{,}8 + 5{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0}{5} = \frac{25{,}0}{5} = 5{,}0$$

- **Mediana**
  Ordenando de menor a mayor las notas:

$$4{,}0 \quad 4{,}8 \quad \boxed{5{,}0} \quad 5{,}2 \quad 6{,}0$$

$$R = 5{,}0$$

Mariel

- **Promedio**

$$Q = \frac{5{,}8 + 5{,}2 + 4{,}0 + 4{,}5 + 5{,}5}{5} = \frac{25{,}0}{5} = 5{,}0$$

- **Mediana**
  Ordenando de menor a mayor las notas:

$$4{,}0 \quad 4{,}5 \quad \boxed{5{,}2} \quad 5{,}5 \quad 5{,}8$$

$$S = 5{,}2$$

Por lo tanto, de los cálculos anteriores se tiene que $P = Q$ y $R < S$, siendo la respuesta correcta la opción C).

PREGUNTA 57

En un liceo se realiza un registro de las masas de los estudiantes de cuarto medio. Si los cuartiles de la distribución de los datos son $75\ \mathrm{kg}$, $80\ \mathrm{kg}$ y $90\ \mathrm{kg}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones se puede(n) deducir de esta información?

I) La mayor cantidad de estudiantes de cuarto medio se concentra entre el cuartil 2 y el cuartil 3.

II) Por lo menos un 50% de los estudiantes de cuarto medio tiene una masa de a lo menos $75\ \mathrm{kg}$ y a lo más $90\ \mathrm{kg}$.

III) La media aritmética de las masas de los estudiantes de cuarto medio es de $81{,}6\ \mathrm{kg}$, aproximadamente.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) debemos recordar que:

◊ el primer cuartil C_1 de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 25% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 75% de los valores son mayores o iguales a él.

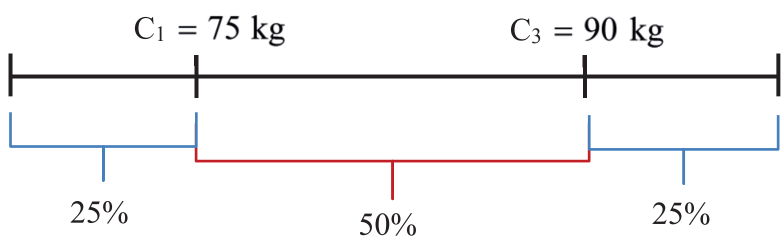
◊ el segundo cuartil C_2 de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 50% de los valores son mayores o iguales a él.

◊ el tercer cuartil C_3 de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 75% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 25% de los valores son mayores o iguales a él.

Del enunciado se tiene que $C_1 = 75 \text{ kg}$, $C_2 = 80 \text{ kg}$ y $C_3 = 90 \text{ kg}$.

Entre C_2 y C_3 puede estar exactamente el 25% de los estudiantes de cuarto medio, por lo tanto, es falso afirmar que la mayor cantidad de estudiantes de cuarto medio se concentra entre el cuartil 2 y el cuartil 3, siendo de esta forma la afirmación en I) falsa.

Para determinar si la afirmación en II) es verdadera, debemos considerar que $C_1 = 75 \text{ kg}$ y $C_3 = 90 \text{ kg}$, lo cual podemos ejemplificar en el siguiente esquema:



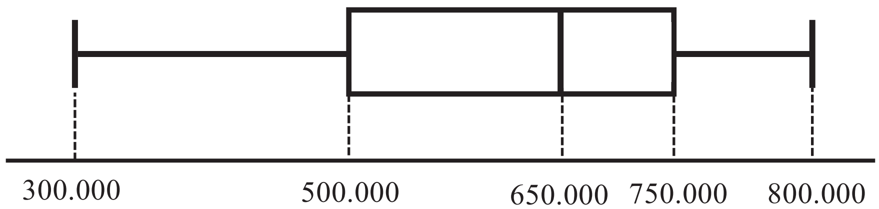
Podemos observar en el esquema anterior que aproximadamente un 50% de los estudiantes de cuarto medio tiene una masa de a lo menos 75 kg y a lo más 90 kg, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Con los datos entregados en el enunciado no es posible calcular la media aritmética de las masas de los estudiantes de cuarto medio. El valor de $81{,}6 \text{ kg}$, corresponde a un procedimiento erróneo de aproximar el resultado obtenido de sumar el valor de los tres cuartiles y dividirlo por 3.

Como solo la afirmación en II) es verdadera, la opción correcta es B).

PREGUNTA 58

La distribución de los sueldos, en pesos, de los trabajadores de una empresa se muestra en el diagrama de caja de la figura adjunta.



Sueldos de los trabajadores (en $)

Según este diagrama, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) El rango intercuartil de los sueldos de los trabajadores es $\$\ 250.000$.

B) El promedio de los sueldos de los trabajadores es $\$\ 650.000$.

C) La cantidad de trabajadores que ganan entre $\$\ 300.000$ y $\$\ 500.000$ es mayor que la cantidad de trabajadores que gana entre $\$\ 650.000$ y $\$\ 750.000$.

D) Exactamente un 50% de los trabajadores gana $\$\ 650.000$.

E) Un $62{,}5\%$ de los sueldos de los trabajadores es igual o menor a $\$\ 700.000$.

RESOLUCIÓN

Del diagrama de caja tenemos que el tercer cuartil de los sueldos de los trabajadores es $\$\ 750.000$ y el primer cuartil es $\$\ 500.000$, luego el rango intercuartil de los sueldos es $\$\ 750.000 - \$\ 500.000 = \$\ 250.000$, por lo que la afirmación en A) es siempre verdadera.

Como el diagrama de caja no entrega información sobre el promedio de los datos, puede que el promedio de los datos sea distinto a $\$\ 650.000$, por lo que la afirmación en B) no es siempre verdadera.

Como la cantidad de trabajadores que gana entre $\$\ 300.000$ y $\$\ 500.000$ y la cantidad de trabajadores que gana entre $\$\ 650.000$ y $\$\ 750.000$ son ambas aproximadamente un 25% de los datos, puede que la cantidad de trabajadores que gana entre $\$\,650.000$ y $\$\,750.000$ sea igual que la cantidad de trabajadores que gana entre $\$\,300.000$ y $\$\,500.000$, por lo que la afirmación en C) no es siempre verdadera.

Ahora, el segundo cuartil de los sueldos es $\$\,650.000$ por lo que, aproximadamente, un 50% de los trabajadores gana menos que esa cantidad, pero dicha información no es suficiente para asegurar que exactamente un 50% de los trabajadores gana $\$\,650.000$, por lo que la afirmación en D) no es siempre verdadera.

Por último, el diagrama de caja solo entrega información referente al dato mayor, el dato menor y los cuartiles de la distribución de los sueldos de los trabajadores, por lo que la afirmación en E) no es siempre verdadera.

Por el desarrollo anterior, la clave es A).

PREGUNTA 59

Se lanzan dos dados comunes consecutivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la diferencia entre el resultado del primer y el segundo dado sea positiva es la misma de que sea negativa.

II) La probabilidad de que la división entre los resultados del primer y el segundo dado sea un número entero es mayor que $\frac{6}{36}$.

III) La probabilidad de que la suma de los resultados de ambos dados sea mayor que 1 es 1.

A) Solo III

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe determinar la veracidad de cada una de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), para esto consideraremos los resultados al lanzar los dados son los siguientes:

posibles resultados del primer dado:

1	2	3	4	5	6

posibles resultados del segundo dado:

1	2	3	4	5	6

Para determinar la veracidad de la afirmación en I) se calculará la diferencia entre el resultado del primer y el segundo dado. En la siguiente tabla se muestran los posibles valores que se pueden obtener de esta diferencia.

–	1	2	3	4	5	6
1	0	–1	–2	–3	–4	–5
2	1	0	–1	–2	–3	–4
3	2	1	0	–1	–2	–3
4	3	2	1	0	–1	–2
5	4	3	2	1	0	–1
6	5	4	3	2	1	0

Así, la probabilidad de obtener un número negativo es $\frac{15}{36}$ y la probabilidad de obtener un número positivo es $\frac{15}{36}$. Luego, como ambas probabilidades son iguales se tiene que la afirmación dada en I) es verdadera.

Ahora, para determinar si la afirmación dada en II) es verdadera, se calculará la división entre los resultados del primer y el segundo dado, dichos resultados se muestran en la siguiente tabla:

:	1	2	3	4	5	6
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
5	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{6}$
6	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

Luego, la probabilidad de que el número obtenido de la división sea un número entero es $\frac{14}{36}$, valor que es mayor que $\frac{6}{36}$, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Por último, la afirmación dada en III) es verdadera, porque **siempre** la suma de los resultados de ambos dados es mayor que 1, esto es porque, el menor valor que se puede obtener en cada dado es el 1, luego la menor suma que se puede obtener es $1 + 1 = 2$, por lo tanto, la probabilidad de que la suma de los resultados de ambos dados sea mayor que 1 es 1.

Por el análisis anterior, la clave es E).

PREGUNTA 60

Andrés es el director técnico del equipo de fútbol Los Astros, el cual realiza un estudio estadístico para su próximo encuentro con su rival, el equipo de Los Cometas.

El estudio de Andrés se centró en la probabilidad que tiene cada uno de los equipos en anotar una cierta cantidad de goles.

Los resultados se los presenta a sus jugadores en uno de los entrenamientos en una pizarra como la de la figura adjunta.

Equipos \ Goles	0	1	2	3
Los Astros	0,19	0,37	0,30	0,14
Los Cometas	0,43	0,30	0,14	0,13

Según estos datos y considerando que convertir goles por parte de ambos equipos es independiente, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a la probabilidad de que el partido entre estos dos equipos termine en empate?

A) $0{,}19 \cdot 0{,}43$

B) $(0{,}19 \cdot 0{,}43) + (0{,}37 \cdot 0{,}30) + (0{,}30 \cdot 0{,}14) + (0{,}14 \cdot 0{,}13)$

C) $(0{,}19 \cdot 0{,}43) \cdot (0{,}37 \cdot 0{,}30) \cdot (0{,}14 \cdot 0{,}13)$

D) $(0{,}37 \cdot 0{,}30) + (0{,}30 \cdot 0{,}14) + (0{,}14 \cdot 0{,}13)$

E) $(0{,}19 + 0{,}43) \cdot (0{,}37 + 0{,}30) \cdot (0{,}30 + 0{,}14) \cdot (0{,}14 + 0{,}13)$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema identificaremos en qué casos el partido terminaría en empate para calcular la probabilidad de que esto suceda.

El partido terminará en empate si ambos equipos conviertan la misma cantidad de goles, es decir, que ambos conviertan cero goles o que ambos conviertan un gol o que ambos conviertan dos goles o que ambos conviertan tres goles.

Recuerde que:

◊ si A y B son sucesos independientes, entonces la probabilidad de que suceda A y B es $P(A) \cdot P(B)$, es decir, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

◊ si A y B son sucesos independientes, se tiene que la probabilidad de que suceda A o B es $P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$, es decir, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$, pero si $A \cap B = \phi$, o sea, A y B son conjuntos disjuntos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A continuación, se muestra la forma de calcular la probabilidad de cada uno de los casos en el que el partido termina en empate:

	Suceso	Probabilidad
Caso 1	Los Astros anotan 0 gol y Los Cometas anotan 0 gol	$0{,}19 \cdot 0{,}43$
Caso 2	Los Astros anotan 1 gol y Los Cometas anotan 1 gol	$0{,}37 \cdot 0{,}30$
Caso 3	Los Astros anotan 2 goles y Los Cometas anotan 2 goles	$0{,}30 \cdot 0{,}14$
Caso 4	Los Astros anotan 3 goles y Los Cometas anotan 3 goles	$0{,}14 \cdot 0{,}13$

Luego, el partido terminará en empate si sucede el caso 1 o el caso 2 o el caso 3 o el caso 4.

Por lo tanto, la probabilidad de que el partido termine en empate es:

$$(0{,}19 \cdot 0{,}43) + (0{,}37 \cdot 0{,}30) + (0{,}30 \cdot 0{,}14) + (0{,}14 \cdot 0{,}13)$$

Expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 61

En cierto experimento, la probabilidad de que ocurra un suceso A es p, mientras que la probabilidad de que ocurra un suceso B es q. Si los sucesos A y B son independientes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos?

A) $p(1 - q)$

B) pq

C) $p(1 - q) + q(1 - p)$

D) $(1 - p)(1 - q)$

E) $p + q - pq$

RESOLUCIÓN

Para responder a la pregunta, consideremos las siguientes probabilidades:

- Probabilidad de que ocurra A: $P(A) = p$
- Probabilidad de que ocurra B: $P(B) = q$
- Probabilidad de que NO ocurra A: $P(\overline{A}) = (1 - p)$
- Probabilidad de que NO ocurra B: $P(\overline{B}) = (1 - q)$

Como los eventos de las probabilidades anteriores son independientes, podemos escribir la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos de la siguiente manera:

$$\underbrace{\text{ocurra } A}_{\underbrace{P(A)}_{p}} \text{ y } \underbrace{\text{no ocurra } B}_{\underbrace{P(\overline{B})}_{(1-q)}} + \underbrace{\text{no ocurra } A}_{\underbrace{P(\overline{A})}_{(1-p)}} \text{ y } \underbrace{\text{ocurra } B}_{\underbrace{P(B)}_{q}} + \underbrace{\text{ocurra } A}_{\underbrace{P(A)}_{p}} \text{ y } \underbrace{\text{ocurra } B}_{\underbrace{P(B)}_{q}}$$

$$P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$p \cdot (1-q) + (1-p) \cdot q + p \cdot q$$

Luego, se desarrolla la expresión $p \cdot (1 - q) + (1 - p) \cdot q + pq$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p \cdot (1 - q) + (1 - p) \cdot q + pq &= p - pq + q - pq + pq \\ &= p + q - pq \end{aligned}$$

Expresión que se encuentra en la opción E).

Otra manera de resolver este problema es considerar que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos, es igual a uno menos la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos, es decir:

$$\begin{aligned} 1-(1-q)(1-p) &= 1-(1-p-q+pq) \\ &= 1-1+p+q-pq \\ &= p+q-pq \end{aligned}$$

PREGUNTA 62

Dos cursos de un colegio realizan una fiesta para reunir fondos para un viaje de estudios. Se reparten dos tipos de entradas, las del tipo P y las del tipo Q. En la tabla adjunta se muestra la distribución de la venta de entradas para el segundo A y el segundo B.

	Cursos	
Tipo de entradas	Segundo A	Segundo B
P	15	10
Q	25	30

Si se selecciona a una persona al azar de estos dos cursos y se sabe que tiene una entrada del tipo Q, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante del segundo B?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{6}{11}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{8}{11}$

E) $\frac{1}{30}$

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta recordemos que:

◊ la probabilidad de ocurrencia de un suceso en el modelo de Laplace es igual a

$$\frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}}$$

◊ la probabilidad condicional consiste en la probabilidad de ocurrencia de un suceso A dado la ocurrencia de un suceso B, la cual se escribe como $\mathrm{P(A/B)}$ y se calcula como $\frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$, donde $\mathrm{P(B)}$ es la probabilidad de que ocurra B, con $\mathrm{P(B)} \neq 0$ y $\mathrm{P(A \cap B)}$ es la probabilidad de que ocurra A y B.

Si seleccionamos a una persona al azar de estos dos cursos, se pueden definir los siguientes sucesos:

T: El estudiante tiene una entrada del tipo Q.
R: El estudiante es del segundo B.
$(T \cap R)$: El estudiante tiene una entrada del tipo Q y es del segundo B.

De la tabla se pueden determinar los casos totales y los casos favorables para calcular $P(T)$ y $P(T \cap R)$, como se muestra a continuación:

	Cursos	
Tipo de entradas	Segundo A	Segundo B
P	15	10
Q	25	30

$\# T = 25 + 30 = 55$

$\# (T \cap R) = 30$

Como la cantidad de casos totales corresponde a la cantidad de personas encuestadas, es decir, $15 + 25 + 10 + 30 = 80$, se tiene lo siguiente:

$$P(T) = \frac{55}{80}$$

$$P(T \cap R) = \frac{30}{80}$$

$$P(R/T) = \frac{\frac{30}{80}}{\frac{55}{80}} = \frac{30}{\cancel{80}} \cdot \frac{\cancel{80}}{55} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$$

Por lo que, la opción correcta es B).

PREGUNTA 63

Para un viaje Andrés arrendará un automóvil en una empresa que le da a elegir entre las marcas P, Q y R. Cada una de estas marcas dispone de dos modelos en los colores blanco, rojo, azul, verde y gris, cada uno de ellos. ¿Cuál es la cantidad máxima de automóviles, de distinto tipo de marca, modelo y color, entre los que Andrés puede elegir?

A) 6

B) 10

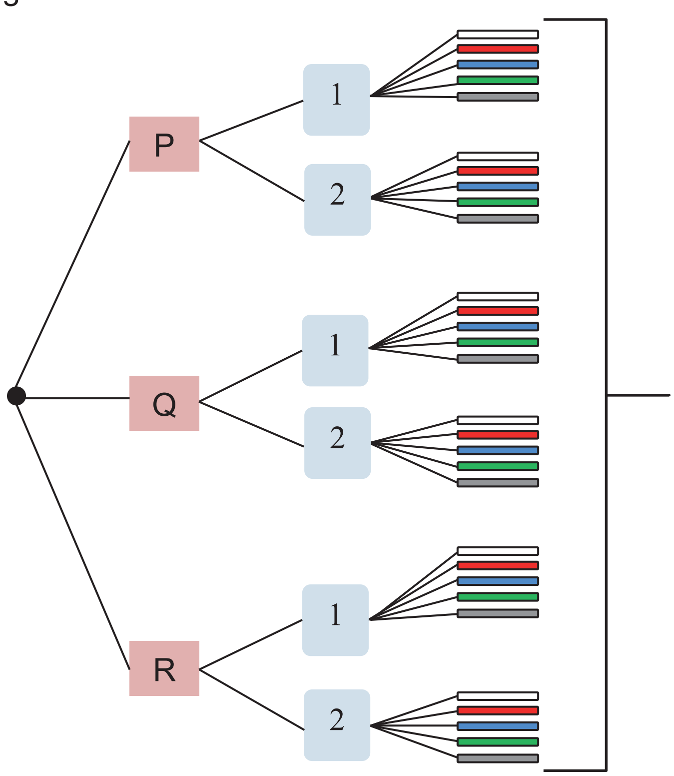
C) 15

D) 30

E) 90

RESOLUCIÓN

Andrés tiene para elegir entre 3 marcas de automóviles (P, Q y R), donde cada una de dichas marcas tiene 2 modelos, los cuales están disponibles en 5 colores (blanco, rojo, azul, verde y gris) cada uno de ellos, lo que se puede representar en el siguiente diagrama:



Como se puede observar, en la última rama se muestra la cantidad máxima de automóviles, de distinto tipo de marca, modelo y color, entre los que Andrés puede elegir, valor que corresponde a 30. De esta forma, la opción correcta es D).

Otra forma de resolver este ítem es aplicar el principio multiplicativo, luego multiplicando la cantidad de marcas (3), la cantidad de modelos (2) y la cantidad de colores (5), se obtiene $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$, que es la cantidad máxima de automóviles entre los que Andrés puede elegir.

PREGUNTA 64

¿Cuántos partidos individuales de tenis se tienen que organizar con n jugadores, donde $n > 2$, si todos juegan contra todos solo una vez?

A) $\frac{n}{2}$

B) $\frac{n}{2} \cdot (n - 1)$

C) $n - 1$

D) $n \cdot \frac{n}{2}$

E) $\frac{n - 1}{2}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este problema debemos determinar la cantidad de partidos individuales que se tienen que organizar con n jugadores, donde todos juegan contra todos solo una vez, lo cual es equivalente a la cantidad de maneras en que se pueden escoger 2 jugadores del total.

La cantidad de combinaciones que se obtienen al escoger 2 jugadores de un total de n, es

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1}}{\cancel{(n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n-1)$$

Expresión que se encuentra en la opción B).

PREGUNTA 65

En una caja hay solo bolitas verdes y rojas, todas del mismo tipo. Se puede determinar la cantidad de bolitas verdes que hay en la caja, si se sabe que:

(1) en la caja hay en total 40 bolitas.

(2) al elegir una bolita al azar de la caja, la probabilidad de que esta sea roja es $\frac{2}{5}$.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Con la información dada en (1) no podemos determinar la cantidad de bolitas verdes, pues solo se entrega la cantidad total de bolitas y no cómo estas se distribuyen entre bolitas verdes y rojas.

Con la información dada en (2) tampoco podemos determinar la cantidad de bolitas verdes, pues “al elegir una bolita al azar de la caja, la probabilidad de que esta sea roja es $\frac{2}{5}$” quiere decir que $\frac{2}{5}$ de las bolitas de la caja son rojas y como en la caja solo hay bolitas verdes y rojas, $\frac{3}{5}$ de las bolitas de la caja son verdes, pero no se sabe el total de bolitas que hay en la caja, por lo que no se puede saber cuánto son los tres quintos de ese total.

Ahora, si se junta la información de (1) y de (2), se conoce la cantidad total de bolitas que hay en la caja y qué fracción de estas son verdes, por lo tanto, se puede determinar la cantidad de bolitas verdes, siendo de esta forma C) la clave.

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES