Lección

Debes saber…

- Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

Combinatoria y probabilidades

Guadalupe debe seleccionar entre 5 de sus compañeros (Alfredo, Beatriz, Carolina, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, que representen al liceo en una competencia. Para ello, quiere averiguar cuántas posibilidades tiene de hacerlo.

Pretende realizar un diagrama de árbol, pero Alonso le sugiere hacerlo solo imaginando que construye el diagrama, mediante los siguientes pasos.

Paso 1 Si tuviera que escoger a sus cinco compañeros en orden, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto. Por lo tanto, el diagrama de árbol tendría:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades}$$

A este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ le llamaremos **5 factorial**, que se escribe **5!**. En general, se puede calcular el factorial de cualquier número natural **n**, multiplicando entre sí todos los números naturales menores o iguales que él.

n! corresponde a la cantidad de formas en que podemos ordenar en una fila a **n** personas (llamadas también **permutaciones**).
Se anota $\mathbf{P_n = n!}$

Paso 2 Ya que solo debe escoger a 3 de sus compañeros, el árbol habría llegado hasta la tercera etapa, es decir, habría tenido solo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

Alonso observa que al "suprimir" las últimas dos etapas en el diagrama de árbol ha debido dividir por $1 \cdot 2 = 2$ el número de casos, es decir:

$$60 = \frac{120}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Al número $\frac{5!}{(5-3)!}$ le llamaremos variación de 3 objetos escogidos entre 5 o simplemente variación de 5 sobre 3 (se anota V_3^5), y corresponde a la cantidad de formas en que podemos escoger, en orden, 3 objetos entre 5 disponibles.

En general, dados dos números naturales m y n, con m > n, se tiene que:

$$\boxed{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Paso 3 Al considerar 60 casos se está pensando que escoger, por ejemplo a Alfredo, Beatriz y Carolina es distinto que escoger a Carolina, Alfredo y Beatriz. Ya que 3 personas pueden ordenarse de $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ maneras, debemos dividir los 60 casos por 6, para obtener las formas de escogerlos sin importar el orden:

$$\frac{60}{6} = 10 = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 2!}$$

Al número $\frac{5!}{(5-3)! \cdot 2!}$ le llamaremos combinación de 5 sobre 3 (se anota C_3^5), y corresponde a la cantidad de formas en que podemos escoger, sin importar el orden, 3 objetos entre 5 disponibles.

En general, dados dos números naturales m y n, con m>n, se tiene que:

$$\boxed{C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}}$$

Si Guadalupe quiere averiguar la probabilidad de escoger a dos hombres y una mujer, solo le falta determinar los casos favorables:

- Posibilidades de escoger a 2 hombres entre 3:
  $C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3$
- Posibilidades de escoger a 1 mujer entre 2:
  $C_1^2 = \frac{2!}{(2-1)! \cdot 1!} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$
- Posibilidades de escoger a 2 hombres entre 3 y 1 mujer entre 2:
  $C_2^3 \cdot C_1^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Por lo tanto, la probabilidad de escoger a dos hombres y una mujer es

$$\boxed{P = \frac{C_2^3 \cdot C_1^2}{C_3^5} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{6}{10}}$$

En resumen

- Si n es un entero positivo, se llama **n factorial** (n!) al producto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.
  Por definición $0! = 1$
- Se llama **permutación** (P_n) a la cantidad de formas que podemos ordenar linealmente **n** elementos. $\longrightarrow P_n = n!$
- Se llama **Variación** (V_n^m) a la permutación de **n** elementos que se seleccionan de un conjunto de **m** elementos distintos. $\longrightarrow V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$
- Se llama **Combinación** (C_n^m) a la cantidad de los distintos grupos que se pueden formar con **n** elementos escogidos de entre **m**, sin considerar el orden. $\longrightarrow C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$

Ayuda

La expresión $\binom{m}{n}$ recibe el nombre de **número combinatorio**, se lee **"m sobre n"**.

Recuerda que por principio multiplicativo, las posibilidades de escoger a dos hombres se multiplican por las de escoger a una mujer, para obtener el total de casos posibles.

Razona y comenta

- Si Guadalupe debe escoger a sus compañeros para formar una directiva del curso, ¿es importante el orden en que los seleccione? ¿Cuál sería, en ese caso, la probabilidad de escoger a dos hombres y una mujer? Justifica.
- ¿En qué casos es importante el orden en que se escojan los elementos de un conjunto? Explica.

Repaso

1. **Calcula** la cantidad de casos posibles de los siguientes experimentos.

   a) Lanzar una moneda 5 veces.

   b) Escoger al azar un menú considerando 3 posibles entradas, 4 platos de fondo y dos postres.

   c) La cantidad de patentes de auto que se pueden formar, utilizando 4 consonantes y 2 dígitos.

   d) Generar al azar una clave secreta, que debe contener 6 caracteres que pueden ser números o letras (sin la ñ).

Práctica guiada

2. **Resuelve** los siguientes problemas. Guíate por el ejemplo.

   Se seleccionan al azar las letras de la palabra SUMA ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja esta palabra?

   Paso 1 Se determinan los casos posibles, que corresponden a las permutaciones de 4 letras, es decir:

   $$P4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

   Paso 2 Ya que la palabra SUMA es uno de esos casos, su probabilidad es:

   $$P = \frac{1}{4}$$

   a) Se seleccionan al azar las letras de la palabra COMPLETA. ¿Cuál es la probabilidad de escoger la palabra PLECOMTA?

   b) Se escogen al azar los diez dígitos. ¿Cuál es la probabilidad de escoger la combinación 7639410825?

   c) Se escogen al azar tres vocales. ¿Cuál es la probabilidad de escoger la combinación EAI?

   d) ¿Cuántas palabras de 4 letras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra PLUMAS? ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una de estas palabras sea elegida LUSA?

   e) Si entre 11 políticos se escogerá a 6 senadores, ¿cuántas posibles combinaciones se pueden elegir? ¿Cuál es la probabilidad de escoger aleatoriamente un determinado grupo de senadores?

3. **Resuelve** los siguientes problemas. Guíate por el ejemplo.

   Mariano tiene 5 lápices a tinta y 8 lápices de grafito, y quiere llevar a su colegio 7 lápices en total. Si los selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que escoja 3 lápices de tinta?

   Paso 1 Calcula la cantidad de formas de escoger 7 lápices de entre 5 + 8 = 13 lápices en total.

   $$\begin{aligned}\binom{13}{7} &= \frac{13!}{(13-7)! \cdot 7!} = \frac{13!}{6! \cdot 7!}\\ &= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot \cancel{10} \cdot 11 \cdot \cancel{12} \cdot 13}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3 \cdot 4} \cdot \cancel{5} \cdot 6}\\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{1 \cdot 6}\\ &= \frac{10\,296}{6}\\ &= 1716\end{aligned}$$

   Paso 2 Calcula la cantidad de formas de escoger 3 lápices de tinta, de entre los 5 que tiene.

   $$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}\\ &= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3}}\\ &= \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\\ &= \frac{20}{2} = 10\end{aligned}$$

   Paso 3 Calcula la cantidad de formas de escoger 4 lápices de grafito, de entre los 8 que tiene.

   $$\begin{aligned}\binom{8}{4} &= \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!}\\ &= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}\\ &= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\\ &= \frac{1680}{24} = 70\end{aligned}$$

Paso 4 Por lo tanto, la probabilidad P pedida es

$$P = \frac{\binom{5}{3}\binom{8}{4}}{\binom{13}{7}} = \frac{10 \cdot 70}{1716} = \frac{700}{1716} = \frac{175}{429}$$

Utiliza el procedimiento anterior para resolver los siguientes problemas:

a) De un grupo de cuatro mujeres y dos hombres se seleccionan tres personas. ¿Cuál es la probabilidad de que queden seleccionados los dos hombres?

b) Considerando el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que queden seleccionadas tres mujeres?

c) Un entrenador de un equipo de fútbol debe escoger a la delegación de 22 jugadores que viajarán a un campeonato. Para ello debe escoger a 2 arqueros de los 3 que tiene, a 6 defensas de 10, 8 mediocampistas de 12 y a 6 delanteros de 9. ¿Cuál es la probabilidad de que dos defensas y un mediocampista cualquiera queden seleccionados?

d) Rebeca e Irene trabajan haciendo turnos en un hospital. De los siete días de la semana, deben escoger 3 que serán sus días libres; Rebeca debe escoger sus días de lunes a jueves e Irene, de jueves a domingo. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas trabaje el jueves?

Aplica

Resuelve los siguientes problemas.

4. ¿Cuántas palabras con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra PALTOS, de tal modo que comiencen con P y terminen con S?

5. Martín quiere sacarse una foto con su familia, compuesta por su papá, su mamá, él y sus dos hermanos. Para eso, se pondrán al azar uno al lado del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que sus dos padres queden juntos en la foto?

6. Paulina quiere adornar su casa con plantas, para lo que le encarga a su hermano que compre 2 plantas de interior y 5 de exterior. En la tienda su hermano compra las plantas al azar (todas distintas) pues no las distingue. Si en la tienda había 6 tipos de plantas de interior y 8 de exterior, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con el deseo de Paulina?

7. En un plano cartesiano hay 5 puntos no colineales (A, B, C, D y E), es decir, no pertenecen a una misma recta, ¿cuántos triángulos es posible dibujar? ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger 3 de los 5 puntos para formar un triángulo se elijan los puntos A, B y C?

8. Un profesor interrogará a la mitad de los estudiantes de un curso de 38. Si uno de ellos no estudió, ¿cuál es la probabilidad de que no salga seleccionado?

9. La clave de un maletín de seguridad está compuesto por 5 dígitos. A su dueño se le olvidó la clave, solo sabe que comienza con un número primo. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tratar de abrir el maletín, acierte con la clave al primer intento?

10. Se formará un equipo de 4 mujeres y 3 hombres elegidos entre 12 mujeres y 18 hombres. Pablo y Camila son hermanos, ¿cuál es la probabilidad de que ellos conformen juntos el equipo?

11. Desafío: Marcela es hermana de Raúl, y Constanza es hermana de Beatriz, mientras que Leonardo no es hermano de los anteriores nombrados. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar a dos personas de este grupo que sean de distinto sexo o que sean hermanos?

Reflexiona

- ¿De qué manera facilita la resolución de problemas de probabilidad el uso de combinatoria? Explica.
- Resuelve los ejercicios 3, 4 y 5 de la lección 44, utilizando combinatoria en lugar de diagramas de árbol. ¿Confirma lo que respondiste en la pregunta anterior? Justifica.