Eventos independientes

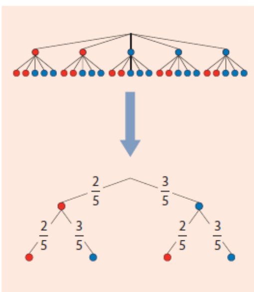
Abraham De Moivre, matemático francés (1667-1754), definió formalmente la dependencia e independencia de sucesos.

Carmen quiere realizar el experimento de la lección anterior (sacar dos veces una bolita de una urna con dos rojas y tres azules) con una diferencia: extraerá la bolita y anotará su color, y luego la devolverá a la urna para extraer por segunda vez. ¿Cuál es ahora la probabilidad de extraer dos bolitas de distinto color?

Para averiguarlo, realiza el siguiente razonamiento:

Paso 1 Los casos favorables corresponden, nuevamente, a sacar una bolita roja y una azul, o sacar una azul y una roja. Es decir:

P(bolitas de distinto color) = P(AyR) + P(RyA)



Paso 2 Al sacar una bolita de la urna por primera vez, la probabilidad de sacar una bolita roja es $\frac{2}{5}$, mientras que la probabilidad de sacar una azul es $\frac{3}{5}$. Al realizar la segunda extracción, estas probabilidades se mantienen, pues la primera bolita es devuelta a la urna. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{P(bolitas de distinto color)} &= \text{P(AyR)} + \text{P(RyA)}\\ &= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\\ &= \frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de extraer dos bolitas de distinto color es igual a $\frac{12}{25}$.

Podemos observar que en este experimento la probabilidad del color de la segunda bolita extraída es **independiente** del color que haya tenido la primera bolita. En general, decimos que dos sucesos son **independientes** si la ocurrencia de uno no afecta en la probabilidad de ocurrencia del otro.

Cuando dos sucesos son independientes, mantienen su probabilidad, por lo que esta puede multiplicarse sucesivamente, sin cambiar, para calcular la probabilidad de un evento.

Razona y comenta

- Si lanzas un dado y obtienes un 3, ¿cambia la probabilidad de obtener un 3 en el siguiente lanzamiento? Los resultados de un dado, ¿son dependientes o independientes?
- Da dos ejemplos de sucesos dependientes y dos de independientes, asociados a algún experimento.

En resumen

Dos sucesos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro. Además se cumple que:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

En caso de que la ocurrencia de A influya sobre la probabilidad de B (y viceversa), los sucesos son **dependientes**. En tal caso,

$$P(A \text{ y } B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Repaso

1. **Calcula,** en cada caso, la probabilidad del suceso indicado.

   a) Obtener tres caras consecutivas al lanzar una moneda.

   b) Lanzar un dado cinco veces y obtener la secuencia 3, 3, 5, 6, 2.

   c) Lanzar un dado cuatro veces, y obtener solo números pares.

   d) Sacar tres cartas de una baraja de 52, y obtener sólo tréboles o diamantes.

   e) Se escoge un dígito al azar de 0 a 6 cuatro veces, para formar un número. Se obtiene un número mayor que 4320.

Práctica guiada

2. **Calcula** la probabilidad de los siguientes sucesos, sabiendo que los sucesos A y B son independientes. Utiliza lo visto en la página anterior. Guíate por el ejemplo:

   P(A) = 0,4; P(B) = 0,3. Calcula P(AyB)

   Ya que los sucesos son independientes, P(A y B) = P(A) • P(B). Por lo tanto:

   P(A y B) = 0,4 • 0,3 = 0,12

   a) P(A) = 0,77; P(B) = 0,99. Calcula P(AyB).

   b) P(A) = 0,01; P(B) = 0,9. Calcula P(AyB).

3. **Determina** si los sucesos A y B son independientes. Guíate por el ejemplo:

   P(A) = 0,5; P(B) = 0,6; P(AyB) = 0,3

   Los sucesos son independientes si P(A) • P(B) = P(AyB). Luego, verificando:

   0,5 • 0,6 = 0,3 = P(A) • P(B)

   Por lo tanto, los sucesos son independientes.

   a) P(A) = 0,2; P(B) = 0,3; P(AyB) = 0,06.

   b) P(A) = 0,4; P(B) = 0,5; P(AyB) = 0,16.

Aplica

4. Una caja contiene 10 bolitas numeradas del 1 al 10. El experimento consiste en "extraer dos bolitas, una primero y otra después" se define los siguientes sucesos:

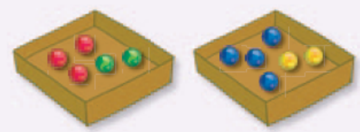
   A: obtener una bolita con un número par en la primera extracción.

   B: obtener una bolita con un múltiplo de 3 en la segunda extracción.

   a) ¿Son independientes los sucesos si se repone la bolita en la primera extracción? Fundamenta.

   b) ¿Qué ocurre con los sucesos si no se repone la bolita?

5. Se dispone de 2 urnas con fichas de colores, como muestra la figura, y se extrae una ficha de cada una.



   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una azul?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una amarilla?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha verde y una no azul?

6. En un grupo de personas la probabilidad de escoger al azar a una persona con cierta enfermedad es de un 10%.

   a) Supón que en el grupo hay 100 personas. Calcula la probabilidad de escoger al azar a dos personas y que tengan la enfermedad.

   b) Supón que en el grupo hay 1000 personas. Calcula la probabilidad de escoger al azar a dos personas y que tengan la enfermedad.

   c) Supón que en el grupo hay 1000 personas. Calcula la probabilidad de escoger al azar a dos personas y que tengan la enfermedad.

   d) Supón que en el grupo hay 10 000 personas. Calcula la probabilidad de escoger al azar a dos personas y que tengan la enfermedad.

   e) Compara las probabilidades anteriores con el producto 0,1 • 0,1. ¿Qué puedes concluir?

Reflexiona

- Explica con tus palabras lo que significa que dos sucesos de un experimento sean independientes.
- Si dos sucesos A y B son dependientes, ¿puede afirmarse que A es causa de B? ¿o que B es causa de A? Justifica.