

**Palabra clave**

Combinación.

## ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer?

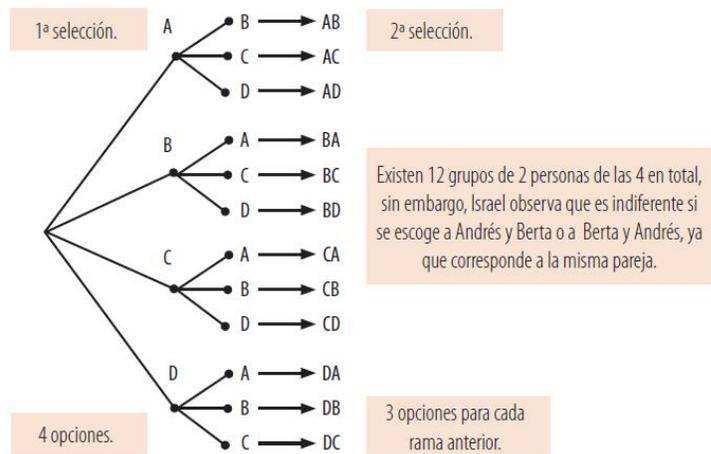
- Cuando compras yogurt de tres frutas distintas, es difícil determinar la combinación de frutas que será de tu agrado. ¿Has pensado cuántas posibilidades de sabores diferentes podrías escoger si combinaras 3 de 10 frutas posibles? ¿Cómo lo calcularías?

Israel está realizando un estudio en el que debe entrevistar grupos de dos personas escogidas al azar de un total de 4, Andrés, Berta, Carla y Daniela. Esta situación se traduce a elegir muestras de 2 personas de una población de 4 personas. ¿De cuántas maneras podría Israel elegir estas muestras?



**Paso 1** Realizar un diagrama de árbol para las posibles combinaciones.

Para ello, identificaremos a las personas con las letras Andrés, Berta, Carla y Daniela.



**Paso 2** Descartar las parejas que se repiten.

Combinaciones descartadas		Combinaciones que quedan	
AB = BA	AC = CA	AB	BC
CD = DC	BC = CB	AC	BD
AD = DA		AD	CD

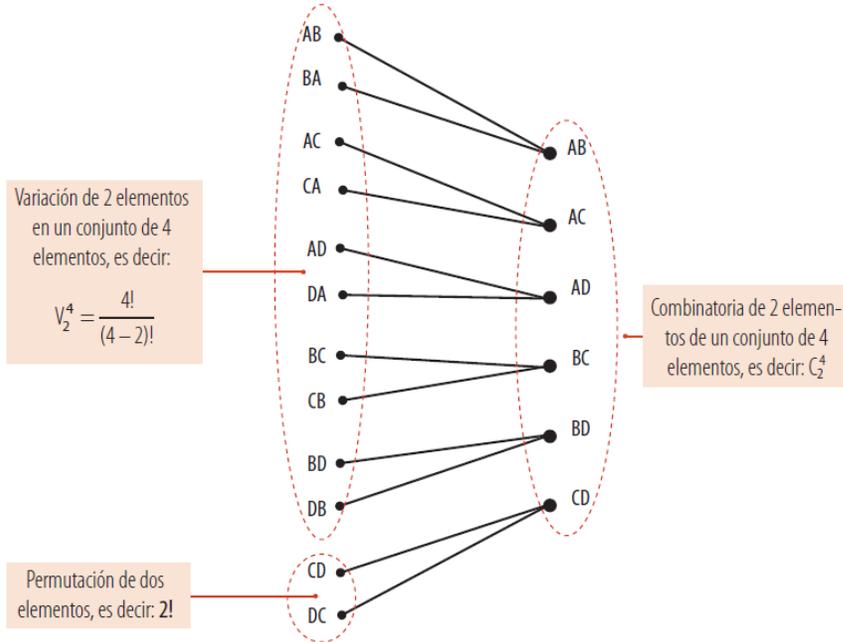
Israel puede elegir entre 6 **combinaciones** de personas para su entrevista, es decir, puede elegir 6 muestras distintas de una población de 4 individuos.

### En resumen

El número de combinaciones que se pueden efectuar con una cantidad  $r$  de elementos desde un conjunto de  $n$  elementos son los distintos grupos de  $r$  elementos que se pueden hacer con los  $n$  elementos, en este caso **no interesa el orden** con el cual se extraen o escogen los elementos.

Israel se pregunta si existe una fórmula o expresión matemática que permita calcular la combinatoria anterior sin necesidad de hacer el diagrama de árbol. Para buscar dicha expresión, Israel realiza los siguientes pasos:

**Paso 1** ▶ Analizar el diagrama de árbol de la situación, identificando permutaciones y variaciones.



### Links

Para reforzar los procedimientos para calcular permutaciones y combinaciones visita:

<http://goo.gl/HPdPL>



**Paso 2** ▶ Israel establece que el producto entre la variación de 2 elementos en un conjunto de 4 elementos ( $V_2^4$ ), es igual al producto entre la permutación de 2 elementos ( $2!$ ) y la combinatoria de 2 elementos en un conjunto de 4 elementos ( $C_2^4$ ), es decir:

$$V_2^4 = 2! \cdot C_2^4 \quad C_2^4 = \frac{V_2^4}{2!}$$

Al despejar  $C_2^4$  y desarrollar la variación se obtiene:

$$C_2^4 = \frac{V_2^4}{2!} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{\cancel{4}^2 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6$$

### En resumen

La combinación de  $r$  elementos de un total de  $n$  elementos, se calcula mediante la expresión:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Donde  $n$  y  $r$  son números enteros positivos y  $n > r$ .

### Observa

La notación  $C_r^n$  es equivalente a  $\binom{n}{r}$

Las combinaciones con repetición de  $n$  elementos tomados de  $p$  en  $p$  se calcula con la siguiente expresión:

$$C_2^4 = \binom{n+p-1}{p}$$

### Razona

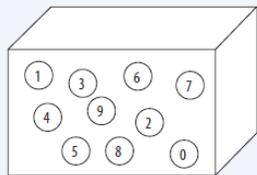
y comenta

- ¿Cuál es la diferencia entre una combinación de elementos y una variación de elementos?
- ¿Cuál sería la probabilidad de que al elegir una pareja de personas al azar, Israel entreviste a Berta y Andrés?

## Repaso

### 1. Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra ELSA?
- ¿Cuántos números pares de cinco cifras se pueden formar utilizando los dígitos de uno al nueve?
- ¿De cuántas formas se pueden ordenar siete libros de Geometría, cinco de Aritmética y tres de Álgebra en un estante?
- Para ir a ver una obra de teatro se ordenarán tres hombres y cuatro mujeres por fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro mujeres no queden separadas?
- En un curso se quiere escoger a la directiva, compuesta por presidente, tesorero y secretario. Si para esta elección hay siete estudiantes que se disputan los tres puestos, ¿cuántas posibles ordenaciones hay?
- Un juego consiste en adivinar los dígitos que se encuentran en una urna con 10 bolitas numeradas del 0 al 9.



- ¿De cuántas maneras se pueden extraer dos bolitas?
- ¿Cuántas extracciones de 4 bolitas se pueden realizar, si las 4 deben ser números pares?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 5 bolitas, de modo que sean números impares?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 4 bolitas, de modo que sean las bolitas marcadas con el 1, 2, 3 y 4?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 4 bolitas, para que sean números consecutivos?

## Práctica guiada

### 2. Calcula el valor de cada combinatoria

$$C_4^6 = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{30}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

- a)  $C_3^4$       b)  $C_2^4$       c)  $C_3^5$       d)  $C_2^5$

### 3. Analiza las siguientes expresiones. Luego, simplificalas.

$$\frac{P_k^n}{V_k^n} = \frac{\frac{n!}{k!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n-k)!}{k! \cdot n!} = \frac{(n-k)!}{k!}$$

- a)  $\frac{P_k^n}{C_k^n}$       b)  $\frac{C_k^n}{P_k^n}$

## Aplico

### 4. Resuelve los siguientes problemas.

- En una fiesta se dieron en 120 apretones de manos como saludo. ¿Cuál fue el número de personas presentes en la fiesta si todos se saludaron de mano en una ocasión?
- Se deben formar diferentes comisiones en un curso compuesto por 15 hombres y 16 mujeres. ¿De cuántas formas se puede armar una comisión de 4 personas?
  - ¿Cuántas comisiones de las anteriores estarán compuestas solamente por varones? ¿Y solamente por mujeres?
  - ¿Cuántas comisiones de 7 personas se pueden formar y en cuántas de ellas habrá al menos a un varón?
  - ¿Cuántas comisiones de 10 personas se pueden formar? ¿Cuántas de esas comisiones tendrán menos de 4 mujeres? ¿Y menos de 7 hombres?
- Una diseñadora debe pintar un cuadro utilizando solamente 10 colores de la paleta de su computador. Si la paleta de su computador tiene 100 colores diferentes, ¿cuántas combinaciones puede realizar?
  - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color rojo?
  - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color rojo y azul?
  - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color verde, rojo y azul?
- Un grupo de amigos se encuentra jugando con naipes inglés de 52 cartas. Si el juego consiste en obtener 13 cartas consecutivas, ¿de cuántas formas se pueden extraer las cartas?

- Si el juego consiste en extraer solamente tres cartas: una jota, una reina y un rey, ¿cuántas extracciones se pueden realizar?
  - ¿De cuántas formas se pueden repartir 10 cartas, de las cuales 6 son picas y 4 son corazones?
- e) El profesor de Física les toma una prueba de 20 preguntas a sus alumnos. ¿De cuántas formas pueden responder los alumnos si deben escoger 10 preguntas?
- ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas en las que deben figurar obligatoriamente la 2, la 3 y la 4?
  - ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas de las cuales deben contestar las dos primeras?
  - ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas y responder al menos 5 de las 6 primeras?
- f) En una bodega se encuentran almacenados 50 refrigeradores, de los cuales se sabe que 5 tienen defectos en el motor. Si se seleccionan al azar 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán dos refrigeradores defectuosos?
- Si se seleccionan al azar a 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán tres refrigeradores defectuosos?
  - Si se seleccionan al azar a 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán 4 refrigeradores defectuosos?
- g) Una fundación decide regalar 30 paquetes de libros a escuelas de bajos recursos. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 30 paquetes de libros entre 10 escuelas si cada una debe recibir 3 paquetes?
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 30 paquetes de libros entre 5 escuelas si cada una debe recibir 6?

5. **Conecto.** Para determinar los posibles resultados en las combinaciones de varios elementos químicos, los científicos utilizan el análisis combinatorio.

### Reflexión

- Si se extraen  $n$  elementos desde un conjunto de  $m$ , elementos, donde  $m > n$ , ¿cuál es la diferencia en el resultado si los  $n$  elementos son diferentes entre sí con respecto a si están repetidos?

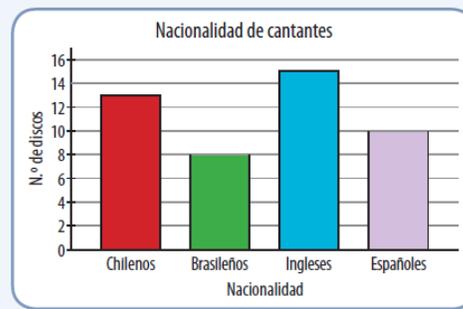
Por ejemplo, para realizar un experimento con 100 sustancias diferentes se realizan combinaciones con tres de ellos. En este caso, ¿cuántas combinaciones se pueden realizar?

6. **Describe el procedimiento.** Describe el procedimiento que se debe seguir para calcular las siguientes combinaciones.

a)  $C_2^7 + C_8^9$                       b)  $\frac{3(6C_3^7)}{-5C_2^4}$

7. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error cometido por Mario al resolver el siguiente problema?

“En la gráfica se muestra la cantidad de discos vendidos en un día por una disquera, según la nacionalidad del artista. ¿De cuántas maneras se pueden combinar 5 discos vendidos de artistas brasileños?”



**Respuesta de Mario:** Si se realiza la combinación entre la totalidad de discos vendidos y la cantidad de discos vendidos de artistas brasileños resulta:

$$\begin{aligned}
 C_8^{46} &= \frac{46!}{(46-8)! \cdot 8!} = \frac{46!}{38! \cdot 8!} \\
 &= \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38!}{38! \cdot 8!} \\
 &= \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 260\,932\,815
 \end{aligned}$$

### Refuerzo

1. ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en un campeonato de una rueda donde participan 20 equipos?
2. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de cinco letras se pueden formar con las letras de la palabra LEONARDO?