Palabras clave

- Permutación.
- Variación.

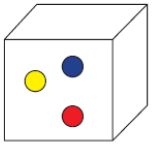
Repasa

En las extracciones sin reposición se extrae la bolita y no se vuelve a ingresar a la urna.

¿De cuántas formas se pueden ordenar una cantidad de objetos?

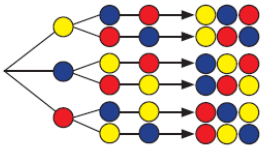
- Supongamos que estás limpiando tu habitación y quisieras ordenar 5 libros en una repisa, ¿de cuántas maneras podrías hacerlo?

Permutación



Rodrigo participa en un experimento que consiste en adivinar el **orden de extracción**, sin reposición, de 3 bolitas desde la urna que muestra la imagen. Si Rodrigo debe escoger un orden al azar, ¿cuántas posibilidades tiene para hacerlo?

Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Se observa que Rodrigo puede escoger entre 6 ordenamientos distintos.

Paso 2 Comprobar lo anterior utilizando el principio multiplicativo.

Posibilidades para la 1.° extracción.

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Posibilidades para la 2.° extracción.

Posibilidades para la 3.° extracción.

Esta situación se conoce como una **permutación** de 3 elementos (P_3), es decir, la cantidad de formas distintas en que se pueden ordenar 3 elementos diferentes.

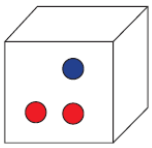
$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Rodrigo puede escoger entre 6 posibilidades para orden de extracción de 3 bolitas de una urna que contiene 3 bolitas de distinto color.

En resumen

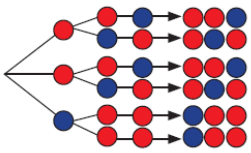
Una **permutación** de **n** objetos diferentes (P_n) corresponde al número de ordenamientos lineales posibles de realizar con **n** elementos. Se expresa como **n!** (**n** factorial)
Por ejemplo **5!** (**5** factorial) se calcula como: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Con **n** entero positivo se tiene $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por definición $0! = 1$

Permutación con repetición



Si el experimento varía y se remplaza la bolita amarilla por una de color rojo, ¿de cuántas formas puede escoger Rodrigo el orden de extracción?

Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 6 formas de ordenamiento, sin embargo, solamente existen 3 ordenamientos diferentes,

Paso 2 Utilizar el cálculo de una permutación con elementos repetidos.

Como existen 2 bolitas que se repiten, la cantidad de ordenamientos de 3 elementos se divide por la cantidad de ordenamientos posibles considerando los elementos repetidos, es decir:

Cantidad de permutaciones con 3 elementos.

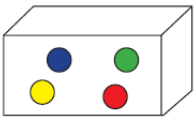
$$P_2^3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Cantidad de permutaciones con 2 elementos.

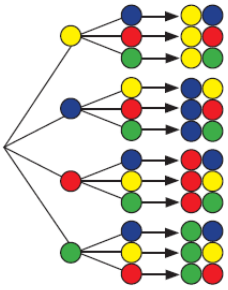
Por lo tanto, Rodrigo puede escoger entre 3 ordenaciones diferentes para la extracción de 3 bolitas de una urna con 3 bolitas donde 2 de ellas tienen el mismo color.

Variación

Ahora el experimento consiste en adivinar el orden de extracción de dos bolitas desde una urna con cuatro bolitas de distinto color. En este caso, ¿cuántos ordenamientos distintos puede escoger Rodrigo?



Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 12 formas distintas de orden para la extracción. Según el principio multiplicativo se puede calcular como $4 \cdot 3 = 12$.

Paso 2 Utilizar el cálculo de la permutación de un subconjunto de un conjunto de elementos.

En este caso, Rodrigo realiza el siguiente análisis a partir del principio multiplicativo, considerando que de 4 elementos se ordenan 2.

2ᵈᵃ extracción

3ᵉʳᵃ extracción

Ordenación de 2 elementos

1ᵉʳᵃ extracción

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ $\quad 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4!$

$4 \cdot 3 \cdot (4-2)! = 4!$

4ᵗᵃ extracción

Total menos los elementos a ordenar

$$4 \cdot 3 = \frac{4!}{(4-2)!} = V_2^4$$

Observa

Para calcular el factorial de un número debes ingresar la tecla $\frac{x!}{x^{-1}}$ de tu calculadora.

Por ejemplo, para calcular 5!, en tu calculadora debes ingresar

5 SHIFT $\frac{x!}{x^{-1}}$ =

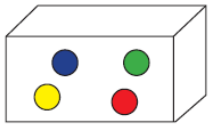
Esto se conoce como una **variación** de 2 elementos desde un conjunto de 4 elementos. Por lo tanto, Rodrigo puede escoger 12 ordenaciones diferentes de extracción de 2 bolitas de una urna que tiene 4 bolitas de diferente color.

En resumen

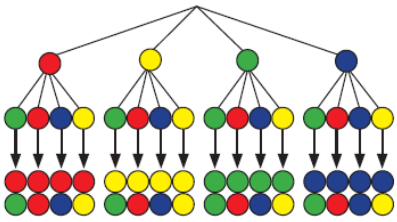
- El número de una **permutación** de **n** elementos con a, b y c elementos repetidos se calcula con la siguiente expresión: $P_{(a,b,c)}^n = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$
- La **permutación** de **r** elementos de un conjunto de **n** elementos **distintos** se conoce como **variación**, y el número de estas permutaciones se calcula mediante la expresión: $V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

Variación con reposición

Si ahora el experimento consiste en extraer una bolita, anotar su color y devolverla a la urna, ¿de cuántas formas se podrán extraer 2 bolitas de la urna?

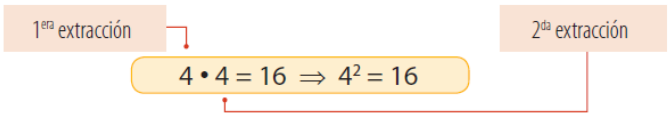


Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 16 formas distintas de orden para la extracción con reposición, ya que la cantidad de ramas del diagrama de árbol no disminuye con cada extracción pues se devuelven las bolitas extraídas.

En este caso, Rodrigo advierte que al aplicar el principio multiplicativo se tiene:



Esto se conoce como una **variación con reposición** de 2 elementos desde un conjunto de 4 elementos distintos. Por lo tanto, Rodrigo puede escoger 16 ordenaciones de la extracción de 2 bolitas de una urna que tiene 4 bolitas de diferente color.

azona y comenta

Si Rodrigo quiere calcular la probabilidad de adivinar el orden de extracción de 3 bolitas con reposición de la última urna mostrada, ¿cómo lo calcularía?

En resumen

La **permutación** de **r** elementos de un conjunto de **n**, con elementos que se puedan repetir se conoce como **variación con reposición**. El número de variaciones en este caso está dado por la expresión: $VR = n^r$

epaso

Resuelve el siguiente problema, aplicando principio multiplicativo o diagrama de árbol.

a) En un torneo de tenis se tienen cuatro equipos, A, B, C y D que se disputan el tercer y cuarto lugar. ¿De cuántas formas posibles estos equipos pueden quedar ubicados en la tabla de posiciones?

b) ¿De cuántas maneras se pueden sentar tres niños en una fila con tres sillas?

c) ¿Cuántas contraseñas de cuatro letras distintas se pueden diseñar con las letras de la palabra CLAVE?

d) Un analista informático va a conectar un servidor para la empresa en la cual trabaja. Tiene a su disposición tres tipos diferentes de procesadores, cuatro modelos de gabinete, memorias RAM de tres capacidades distintas y una tarjeta madre de dos modelos distintos. ¿Cuántas opciones tiene para conectar el servidor?

e) Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?

f) De una ciudad "A" a otra ciudad "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de "A" a "C"?

Práctica guiada

2. Calcula el valor de las siguientes permutaciones y variaciones.

$$V_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

a) P_5 **c)** $P_{(4)}^{5}$ **e)** V_5^6

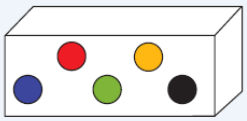
b) $P_{(3)}^{7}$ **d)** V_2^4 **f)** V_6^{10} (se pueden repetir)

Aplico

3. Resuelve los siguientes problemas.

a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sin que se repita ninguna? ¿Y si se repite cada uno en dos ocasiones? ¿Cuántos de esos números terminarán en 26?

b) Amalia participa en un juego que consiste en adivinar el orden de extracción de 5 bolitas desde una urna que contiene 5 bolitas de colores.

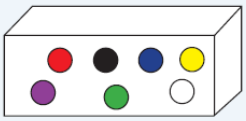


- ¿Cuántas extracciones distintas existen?
- Si Amalia dice que la primera bolita es de color azul, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?
- Si Amalia dice que la primera bolita es azul y la segunda verde, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?
- Si Amalia dice que la última bolita es de color amarillo, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?

c) Carmen es atleta y ha ganado varios campeonatos. Ella tiene sus trofeos en una repisa y de vez en cuando los saca todos para limpiarlos. Si tiene 6 trofeos, ¿de cuántas maneras distintas puede ponerlos en una fila de la repisa?

- Si 3 trofeos corresponden a 1er lugar, ¿de cuántas maneras puede ordenarlos quedando esos tres trofeos primero?
- Si 1 trofeo corresponde a 1er lugar, ¿de cuántas maneras puede ordenarlos quedando ese primero?

d) Isabel realiza el siguiente experimento en la feria de su colegio: desde una urna con 7 bolitas como muestra la figura, se debe adivinar el orden de extracción de 3 bolitas que realizará un compañero con los ojos vendados.



Existen dos formas de extraer las bolitas:
A: una a una y sin reposición
B: una a una y con reposición

- ¿Cuántas extracciones distintas existen si se extraen tres bolitas sin reposición?
- ¿Cuántas extracciones distintas existen si se extraen tres bolitas con reposición?
- Si un concursante adivina que en la primera extracción sin reposición la bolita es de color negro ¿cuántas extracciones posibles existen para que gane? ¿Y si la extracción se realiza con reposición?

4. Analiza la siguiente información y luego responde.

A Carlos le gusta realizar anagramas, es decir intercambiar las letras de una palabra para crear otra, por ejemplo, al cambiar las letras de la palabra AMOR se pueden obtener palabras con y sin sentido, como ROMA y MARO. ¿Cuántos anagramas puede crear Carlos con las siguientes palabras?

a) AMOR **e)** CHANCHO

b) CASA **f)** PERRO

c) PELEA **g)** ANA

d) GATO **h)** CAMIONETA

5. Desafío. ¿Cuál es la cantidad de dígitos mínimos que necesitas para formar 90 números de seis cifras?

Reflexiono

- ¿Por qué crees que es necesario conocer y analizar las permutaciones o variaciones de diversos elementos?

Refuerzo

¿De cuántas maneras puedes ordenar en una repisa 8 libros de los cuales 3 son de Matemática?